第 31 卷 第 2 期　　太 原 理 工 大 学 学 报　　Vol. 31 No. 2
2000 年 3 月　　JOURNAL OF TAIYUAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY　　Mar. 2000

文章编号:1007-9432(2000)02-0227-04

多项式软化子的一个应用

李娟娟
(太原理工大学文理学院)

摘　要:给出多项式软化子的几个性质,并由此证得用多项式一致逼近连续函数的结论。

关键词:函数逼近;多项式软化子;一致
中图分类号:O174.4　　　文献标识码:A

在随机分析、尤其是有关随机微分方程和 Ito 公式的问题中,常常要用到函数逼近[1]的方法。鉴于多项式函数的特殊性,多项式逼近的应用尤为广泛。本文利用多项式软化子[2]的性质,得到一个多项式逼近的结果,该结果在相关问题的研究中占有非常重要的地位。

1　定理及证明

定理 1　设 $f(x,t)$ 为 $R\times R^+$ 上的连续函数且 f_x, f_{xx}, f_t 皆连续,则存在一列多项式 $G_n(x,t)$ 和 $R\times R^+$ 中的有界闭集 F,使得 $G_n(x,t)\longrightarrow f(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial x}G_n(x,t)\longrightarrow f_x(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_n(x,t)\longrightarrow f_{xx}(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial t}G_n(x,t)\longrightarrow f_t(x,t)(n\to\infty)$ 在 F 上是一致的。

我们以引理形式作为步骤完成上述问题证明。

引理 1　$\forall\ \varepsilon>0$,有

$$\int_\varepsilon^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y\Big/\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y\to 0(k\to\infty).$$

证明　首先,$I_{2k+1}=\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}=\frac{1}{2k+1}\prod_{p=1}^{k}\frac{2p}{2p-1}$.

其次,

$$0\leqslant\int_\varepsilon^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y\Big/\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y\leqslant$$

$$(1-\varepsilon^2)^k(1-\varepsilon)/I_{2k+1}\leqslant$$

$$(1-\varepsilon)\cdot\frac{2k+1}{\mathrm{e}^{\varepsilon^2 k}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1-\varepsilon^2}{2}\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p}}.$$

因为 $k\to\infty$ 时,$\frac{2k+1}{\mathrm{e}^{\varepsilon^2 k}}\to 0$,且 $\sum\limits_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$ 发散,所以引理 1 得证。

引理 2　设 $f(x)$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上连续函数,记

$$(P_kf)(x)=\int_\alpha^\beta[1-(x-y)^2]^kf(y)\mathrm{d}y\Big/\int_{-1}^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y\ ,\ (k=1,2,\cdots).$$

则 $\exists\ \delta>0$,当 $k\to\infty$ 时,$(P_kf)(x)\to f(x)$ 关于 $x\in[\alpha+\delta,\beta-\delta]$ 是一致的,$(P_kf)(x)$ 为多项式,称为 f 的(一元)多项式软化子。

证明　考虑 $(\alpha,\beta)=[0,1]$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,所以必为一致连续。则 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0(\delta<\frac{1}{2})$,当 $|y-x|<\delta$ 时,有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$,且 $|f(x)|\leqslant M$(有界)。

$\forall\ x\in[\delta,1-\delta]$:

$$(P_kf)(x)=\int_0^1[1-(x-y)^2]^k\cdot f(y)\mathrm{d}y\Big/\int_{-1}^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y=$$

$$\frac{\int_0^{(x-\delta)}[1-(x-y)^2]^kf(y)\mathrm{d}y}{2\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}+$$

$$\frac{\int_{x-\delta}^{x+\delta}[1-(x-y)^2]^kf(y)\mathrm{d}y}{2\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}+$$

* 作者简介:李娟娟,女,1967 年 3 月生,硕士,讲师,研究方向:非线性力学,太原,030024
收稿日期:1999-08-30

$$\frac{\int_{x+\delta}^{1}[1-(x-y)^2]^k f(y)\mathrm{d}y}{2\int_0^1(1-y^2)\mathrm{d}y} = S_1+S_2+S_3,$$

$$|S_1| \leqslant \frac{M}{2}\frac{\int_0^{x-\delta}[1-(x-y)^2]^k \mathrm{d}y}{\int_0^1(1-y^2)^k \mathrm{d}y} \leqslant$$

$$\frac{M}{2}\frac{\int_\delta^1(1-t^2)^k \mathrm{d}t}{\int_0^1 (1-y^2)^k \mathrm{d}y} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

且关于 $x\in[\delta,1-\delta]$是一致的。

类似地，$S_3\to 0(k\to\infty)$，且关于 $x\in[\delta,1-\delta]$也是一致的。

$$|S_2-f(x)| \overset{x-y=t}{=}$$

$$\left|\frac{\int_{-\delta}^{\delta}(1-t^2)^k f(x-t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^1(1-y^2)^k f(x)\mathrm{d}y}{2\int_0^1(1-y^2)^k \mathrm{d}y}\right|$$

$$\leqslant \varepsilon + M\frac{\int_\delta^1 (1-t^2)^k \mathrm{d}t}{\int_0^1(1-y^2)^k \mathrm{d}y}\varepsilon' .$$

所以，$S_2\to f(x)(k\to\infty)$，且关于 $x\in[\delta,1-\delta]$是一致的。

综合得，$|(P_kf)(x)-f(x)|\to 0(k\to\infty)$关于 $x\in[\delta,1-\delta]$是一致的。

考虑$[\alpha,\beta]\neq[0,1]$，令 $z=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$，则 $x\in[\alpha,\beta]$时，$z\in[0,1]$，并且$\forall\ \delta\in\left(0,\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$，有 $x\in[\alpha+\delta,\beta-\delta]$，$z\in\left[\frac{\delta}{\beta-\alpha},1-\frac{\delta}{\beta-\alpha}\right]$，$0<\frac{\delta}{\beta-\alpha}<\frac{1}{2}$．因此，$(P_kf)(z)\to f(z)(k\to\infty)$关于$\left[\frac{\delta}{\beta-\alpha},1-\frac{\delta}{\beta-\alpha}\right]$一致等价于$(P_kf)(x)\to f(x)(k\to\infty)$关于$[\alpha+\delta,\beta-\delta]$一致。引理 2 得证。

引理 3 设 $f(x_1,x_2)$为 $I=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]$上连续函数，记

$$(P_kf)(x_1,x_2)=$$

$$\frac{\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}[1-(x_1-y_1)^2]^k[1-(x_2-y_2)^2]^k f(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{\left[\int_{-1}^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y\right]^2},$$

则存在 I 内部的闭子集 I_0，使得当 $k\to\infty$ 时，$(P_kf)(x_1,x_2)\longrightarrow f(x_1,x_2)$关于$(x_1,x_2)\in I_0$ 是一致的，(P_kf)为(二元)多项式软化子。

证明 只需考虑 I_0 为矩形的情形。

如图 1 所示，考虑 $I=[0,1]\times[0,1]$．则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0,\delta_2>0(\delta_1<\frac{1}{2},\delta_2<\frac{1}{2})$，当$|x_1-y_1|<\delta_1$，$|x_2-y_2|<\delta_2$ 时，有$|f(x_1,x_2)-f(y_1,y_2)|<\varepsilon$，且$|f(x_1,x_2)|\leqslant M$(有界)．

$$\forall\ (x_1,x_2)\in[\delta_1,1-\delta_1]\times[\delta_2,1-\delta_2],$$

$$(P_kf)(x_1,x_2)=$$

$$\sum_{i=1}^{9}\frac{\iint_{I_i}[1-(x_1-y_1)^2]^k[1-(x_2-y_2)^2]^k f(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2}{[\int_{-1}^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y]^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{9}S_i.$$

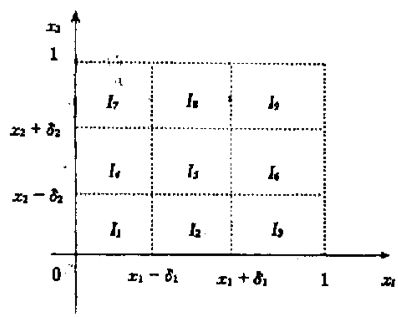

图 1 I_i 的示意图

$$|S_1|\leqslant\frac{M}{4}\frac{\int_0^{x_1-\delta_1}[1-(x_1-y_1)^2]^k\mathrm{d}y_1}{\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}\cdot$$

$$\frac{\int_0^{x_2-\delta_2}[1-(x_2-y_2)^2]^k\mathrm{d}y_2}{\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}\leqslant$$

$$\frac{M}{4}\frac{\int_{\delta_1}^1(1-t_1^2)^k\mathrm{d}t_1}{\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}\cdot$$

$$\frac{\int_{\delta_2}^1(1-t_2^2)^k\mathrm{d}t_2}{\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}\to 0\quad(k\to\infty),$$

且关于$(x_1,x_2)\in[\delta_1,1-\delta_1]\times[\delta_2,1-\delta_2]$是一致的。

类似地，当 $k\to\infty$时，$|S_2|\to 0$，$|S_3|\to 0$，$|S_4|\to 0$，$|S_6|\to 0$，$|S_7|\to 0$，$|S_8|\to 0$，$|S_9|\to 0$，关于$(x_1,x_2)\in[\delta_1,1-\delta_1]\times[\delta_2,1-\delta_2]$也是一致的。

如图 2 所示：

$$|S_5-f(x_1,x_2)|\leqslant$$

$$\left[\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}(1-t_1^2)^k(1-t_2^2)^k\cdot\right.$$

$$\left.|f(x_1-t_1,x_2-t_2)-f(x_1,x_2)|\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\right]/$$

$$\left[\int_{-1}^{1}(1-y^2)^k\mathrm{d}y\right]^2+$$

$$M\sum_{\substack{j=1\\j\neq5}}^{9}\frac{\iint_{J_j}(1-t_1)^k(1-t_2)^k\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}{\left[\int_{-1}^{1}(1-y^2)^k\mathrm{d}y\right]^2}\leqslant$$

$$\varepsilon\frac{\int_0^{\delta_1}(1-t_1^2)^k\mathrm{d}t_1}{\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}\cdot\frac{\int_0^{\delta_2}(1-t_2^2)^k\mathrm{d}t_2}{\int_0^1(1-y^2)^k\mathrm{d}y}+$$

$$M\sum_{\substack{j=1\\j\neq5}}^{9}N_j\leqslant\varepsilon+M\sum_{\substack{j=1\\j\neq5}}^{9}N_j.$$

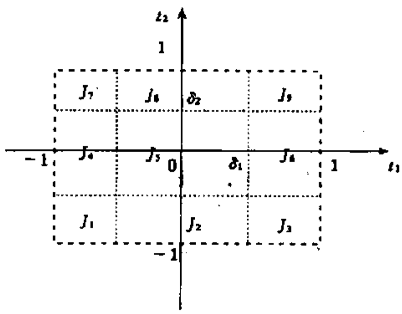

图 2　J_j 的示意图

$$N_1=\frac{\iint_{J_1}(1-t_1^2)^k(1-t_2^2)^k\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}{\left[\int_{-1}^{1}(1-y^2)^k\mathrm{d}y\right]^2}\to0\ (k\to\infty\ \text{时}).$$

类似地，$N_2\to0$，$N_3\to0$，$N_4\to0$，$N_6\to0$，$N_7\to0$，$N_8\to0$，$N_9\to0$ $(k\to\infty)$，关于 $(x_1,x_2)\in[\delta_1,1-\delta_1]\times[\delta_2,1-\delta_2]$ 是一致的。

再由 ε 的任意性，$|S_5-f(x_1,x_2)|\to0$，$(k\to\infty)$ 关于 $(x_1,x_2)\in[\delta_1,1-\delta_1]\times[\delta_2,1-\delta_2]$ 是一致的。

综合得，$|(P_kf)(x_1,x_2)-f(x_1,x_2)|\to0$，$(k\to\infty)$ 关于 $(x_1,x_2)\in[\delta_1,1-\delta_1]\times[\delta_2,1-\delta_2]$ 是一致的。

现考虑 $I\neq[0,1]\times[0,1]$.

令 $z_1=\dfrac{x_1-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}$，$z_2=\dfrac{x_2-\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}$，则对 $0<\delta_1<\dfrac{\beta_1-\alpha_1}{2}$，$0<\delta_2<\dfrac{\beta_2-\alpha_2}{2}$，有 $(x_1,x_2)\in[\alpha_1+\delta_1,\beta_1-\delta_1]\times[\alpha_2+\delta_2,\beta_2-\delta_2]$ 时，$(z_1,z_2)\in\left[\dfrac{\delta_1}{\beta_1-\alpha_1},1-\dfrac{\delta_1}{\beta_1-\alpha_1}\right]\times\left[\dfrac{\delta_2}{\beta_2-\alpha_2},1-\dfrac{\delta_2}{\beta_2-\alpha_2}\right]$，其中，$0<\dfrac{\delta_1}{\beta_1-\alpha_1}<\dfrac{1}{2}$，$0<\dfrac{\delta_2}{\beta_2-\alpha_2}<\dfrac{1}{2}$．所以 $(P_kf)(z_1,z_2)\to f(z_1,z_2)$ $(k\to\infty$ 时$)$，关于 $(z_1,z_2)\in\left[\dfrac{\delta_1}{\beta_1-\alpha_1},1-\dfrac{\delta_1}{\beta_1-\alpha_1}\right]\times\left[\dfrac{\delta_2}{\beta_2-\alpha_2},1-\dfrac{\delta_2}{\beta_2-\alpha_2}\right]$ 一致等价于 $(P_kf)(x_1,x_2)\to f(x_1,x_2)$ 关于 $(x_1,x_2)\in[\alpha_1+\delta_1,\beta_1-\delta_1]\times[\alpha_2+\delta_2,\beta_2-\delta_2]$ 一致。

至此，引理 3 得证。

引理 4　如果 $f(x_1,x_2)\in C^2(I)$ 且在 I 边界邻域内 f 为零，则当 $k\to\infty$ 时，对任意 i_1,i_2，$0\leqslant i_1+i_2\leqslant2$，$\dfrac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}+\partial x_2^{i_2}}(P_kf)(x_1,x_2)\to\dfrac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f(x_1,x_2)$，关于 $(x_1,x_2)\in I_0$ 是一致的（I_0，I 同引理 3）。

证明　由引理 3，只需证明对 $0\leqslant i_1+i_2\leqslant2$ 有 $\dfrac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}(P_kf)(x_1,x_2)=\left(P_k\dfrac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f\right)(x_1,x_2)$，其中 $\left(P_k\dfrac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{x_1}\partial x_2^{i_2}}f\right)(x_1,x_2)$ 表示 $\dfrac{\partial^{i_1+i_2}}{\delta x_1^{i_1}\delta x_2^{i_2}}f(x_1,x_2)$ 的多项式软化子。

考虑 $I=[\alpha,\beta]$，$\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(P_kf)(x)=\left(P_k\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}f\right)(x)$，$0\leqslant i\leqslant2$.

$i=0$ 时，即为引理 2.

$i=1$ 时，由定义

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P_kf)(x)=\lim_{h\to0}\frac{(P_kf)(x+h)-(P_kf)(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h\int_{-1}^{1}(1-y^2)^k\mathrm{d}y}\cdot$$

$$\int_\alpha^\beta[1-(x-y)^2]^k[f(y+h)-f(y)]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-y^2)^k\mathrm{d}y}\int_\alpha^\beta[1-(x-y)^2]^kf'(y)\mathrm{d}y=(P_kf')(x).$$

注意以上用到了 $|h|<\dfrac{r}{2}$（r 为 I 边界邻域的最小半径）这个性质，因此 $0\leqslant|h|+h<r$，$0\leqslant|h|-h<r$. 即 $\alpha+|h|-h$，$\beta-|h|-h$ 均在边界邻域内。

同理，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(P_kf)(x)=(P_kf'')(x)$. 现考虑 $I=[\alpha_1,\beta_1]\times[\alpha_2,\beta_2]$.

同上，r 为边界邻域的最小半径。

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(P_kf)(x_1,x_2)=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{(P_kf)(x_1+h,x_2)-(P_kf)(x_1,x_2)}{h}$$

$$=\frac{1}{\left[\int_{-1}^{1}(1-y^2)^k\mathrm{d}y\right]^2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}$$

$$[1-(x_1-y_1)^2]^k[1-(x_2-y_2)^2]^k\cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2=$$

$$\left(P_k\frac{\partial}{\partial x_1}f\right)(x_1,x_2)=(P_kf_{x_1})(x_1,x_2).$$

同理：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(P_kf)(x_1,x_2)=(P_kf_{x_1x_1})(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(P_kf)(x_1x_2)=(P_kf_{x_2})(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(P_kf)(x_1,x_2)=(P_kf_{x_2x_2})(x_1,x_2);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(P_kf)(x_1,x_2)=(P_kf_{x_1x_2})(x_1,x_2).$$

利用引理3即得引理4.

引理5　如果 $f(x_1,x_2)\in C^2(R^2)$,则存在多项式序列 $\theta_n(x_1,x_2)$,使得当 $k\to\infty$ 时,对 $0\leqslant i_1+i_2\leqslant 2$,有 $\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}\theta_n(x_1,x_2)\to\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\delta x_2^{i_2}}f(x_1,x_2)$ 在 R^2 中某个有界闭集 F_0 上是一致的。

证明　取闭矩形集套 $I_m\subset R^2$,且 $I_1\subset I_2\subset\cdots\subset I_m\subset\cdots I_m\uparrow R^2(m\uparrow\infty)$.

记 $f_m(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)x_{I_m}(x_1,x_2),\forall\ (x_1,x_2)\in R^2$,则 $f_m(x_1,x_2)\in C^2(I_m)$. 修正 f_m 在 I_m 边界邻域定义,可使得 $f_m\in C^2(I_m)$ 且 $f_m(x_1,x_2)$ 在 I_m 边界邻域内为零。

由 f_m 的定义,显然有 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ M>0$,当 $m>M$ 时,有 $\left|\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f_m(x_1,x_2)-\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f(x_1,x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ 关于 $(x_1,x_2)\in R^2$ 是一致的。

另一方面,对于每个 m,由引理4,$\exists\ K_m$ 和 I_m 内的闭子集 I_m^0,当 $k>K_m$ 时,$\left|\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}(P_kf_m)(x_1,x_2)-\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f_m(x_1,x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ 关于 $(x_1,x_2)\in I_m^0$ 是一致的。

我们可以保证 $K_1<K_2<K_3<\cdots<K_m<\cdots$. 取 $k_m>K_m$(可以保证 $k_1<k_2<\cdots<k_m<\cdots$),则上式一定成立,即

$$\left|\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}(P_{k_m}f_m)(x_1,x_2)-\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f_m(x_1,x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记 $\theta_m(x_1,x_2)=(P_{k_m}f_m)(x_1,x_2)$,则 $\theta_m(x_1,x_2)$ 为多项式序列,且 $m>M$ 时,

$$\left|\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}\theta_m(x_1,x_2)-\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f(x_1,x_2)\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}(P_{k_m}f_m)(x_1,x_2)-\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f_m(x_1,x_2)\right|$$
$$+\left|\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f_m(x_1,x_2)-\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}}f(x_1,x_2)\right|<\varepsilon,$$

关于 $(x_1,x_2)\in I_m^0$ 也是一致的。记 $F_0=\bigcap_m I_m^0$,则在 F_0 上也是一致的。至此完成引理5的证明。

定理的证明,由以上引理3,4,5显然易得。

附注:引理3,4,5都可以推广于有限维情形,因此本定理可推广到 $R^n\times R^+$ 的情形。

参考文献

[1] Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics: vol. 1[M]. New York: Wiley (Inter Science), 1953. 63~72.

[2] Friedman A. Partial Differential Equations[M]. New York, 1969. 115~160.

An Application of Polynomial Mollifier

Li Juanjuan

(*The Arts & Sciences College of TUT*)

Abstract: Some properties of polynomial mollifier are presented and the conclusion that polynomial can consistently approximate continuous function is proved.

Key words: functional approximation; polynomial mollifier; consistence

(本文责任编辑:张红霞)