

第一章 逼近论中的 Bernstein 猜测

1.1 引言

对于定义在区间 $[-1, +1]$ 上的任一实值函数 $f(x)$ 以及任意的 $\delta > 0$ 其连续模定义为:

$$\omega(\delta; f) := \sup_{\substack{x_1 - x_2 \leq \delta \\ x_1, x_2 \in [-1, +1]}} |f(x_1) - f(x_2)|, \quad (1.1)$$

而其在 $[-1, +1]$ 上的一致范数定义为

$$\|f\|_{L_\infty[-1, +1]} := \sup\{|f(x)| : x \in [-1, +1]\}. \quad (1.1')$$

用 π_n 代表次数最高为 n ($n = 0, 1, \dots$) 的全体实多项式的集合, 下面是熟知的 Jackson[8] 中的结果 (见 (Meinardus [9, p.56], Rivlin[11, p.22]):

定理 1 (Jackson [8]) 若 $f(x)$ 为定义在 $[-1, +1]$ 上的一个连续实值函数, 则

$$E_n(f) \leq \sigma\omega\left(\frac{1}{n}; f\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.2)$$

其中

$$E_n(f) := \inf\{\|f - g\|_{L_\infty[-1, +1]} : g \in \pi_n\}. \quad (1.3)$$

大家都知道 (见 [9, p.16]) 对定义在 $[-1, +1]$ 上的任何连续实值函数 $f(x)$, 在 π_n 中存在唯一的 多项式 $\hat{p}_n(x) = \hat{p}_n(x; f)$ 使得

$$E_n(f) = \|f - \hat{p}_n\|_{L_\infty[-1, +1]}, \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (1.3')$$

并称 $\hat{p}_n(x)$ 为在 $[-1, +1]$ 上函数 $f(x)$ 在 π_n 中的最佳一致逼近多项式. 此外, 由 (1.3) 序列 $\{E_n(f)\}_{n=0}^\infty$ 是一个非负的非增序列. 根据 Weierstrass 逼近定理 (见 [11, p.11]) 它趋于零, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0. \quad (1.4)$$

对于 $[-1, +1]$ 上特殊的连续函数 $|x|$, 不难看出

$$\omega(\delta; |x|) = \delta \quad (0 < \delta \leq 1),$$

从定理一的 (1.2) 式, 可有,

$$E_n(|x|) \leq \frac{\sigma}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.4')$$

对于函数 $|x|$ 说来, 这个式子比 (1.4) 更精确.

因为 $|x|$ 是 $[-1, +1]$ 上的连续偶函数, 那么对任何 $n \geq 0$ 它在 $[-1, +1]$ 上在 π_n 中的最佳一致逼近也是偶函数 (见 Rivlin [11, p.43 练习 1.1]). 把这个结果和最佳一致逼近多项式的 Chebyshev 变化特性结合起来, 就可进一步得到 (见 [11, p.26])

$$E_{2n}(|x|) = E_{2n+1}(|x|) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.5)$$

因此, 对我们来说, 仅考虑序列 $\{E_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{\infty}$ 减到零的样子就足够了. 从 (1.4'), 我们显然有

$$2nE_{2n}(|x|) \leq 6 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.6)$$

为了改进 (1.6) 的上界, 在 $[-1, +1]$ 上把 $|x|$ 展成 Chebyshev 级数, 即

$$|x| = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} T_{2m}(x)}{(2m-1)(2m+1)} \right\}, \quad (1.7)$$

其中 $T_n(x)$ 是 n 阶 Chebyshev 多项式 (第一类). 因为对所有在 $[-1, +1]$ 中的 x 都有 $|T_n(x)| \leq 1$, 去掉 (1.7) 式中的前 n 项和, 则 (1.7) 式余项的绝对值满足

$$\frac{4}{\pi} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} T_{2m}(x)}{(2m-1)(2m+1)} \right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+1)}.$$

但是

$$\frac{1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right),$$

则这个上界可简单地缩小为

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) + \dots \right\} = \frac{2}{\pi(2n+1)}. \end{aligned}$$

于是

$$\left| |x| - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1} T_{2m}(x)}{(2m-1)(2m+1)} \right\} \right| \leq \frac{2}{\pi(2n+1)}, \quad (1.8)$$

对于在 $[-1, +1]$ 中的所有 x 及任何 $n \geq 1$ 成立, 因为 (1.8) 式中给出 $|x|$ 的逼近多项式为一个具体的 $2n$ 次多项式, 从而 (1.8) 隐涵着

$$2nE_{2n}(|x|) \leq \frac{4n}{\pi(2n+1)} < \frac{2}{\pi} = 0.63661 \dots \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.9)$$

它又改进了 (1.6) 式.

在 1913 年 S. Bernstein^[2] 进一步把 (1.9) 中的上界 $0.63661 \dots$ 大大地精确化了. 从 (1.9) 式直接给出 (1.10) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2nE_{2n}(|x|) \leq \frac{2}{\pi} = 0.63661 \dots$, 经过一个冗长复杂的证明, Bernstein 给出下面更进一步的结果:

定理 2 (Bernstein [2]) 存在正的常数 β (β 代表 Bernstein 常数), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nE_{2n}(|x|) = \beta, \quad (1.11)$$

其中 β 满足

$$0.278 < \beta < 0.286. \quad (1.12)$$

除上述结果外, Bernstein 在 [2, p.56] 中还指出常数

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.2820947917 \dots \quad (1.13)$$

也在 (1.12) 给出的界限内, 并接近于 (1.12) 中 β 上、下限的平均值 0.282 , 这好像是一种奇怪的巧合. 过几年这个发现就成为 Bernstein 猜测 (1913):

$$\beta \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.282094917 \dots \quad (1.14)$$

从 Bernstein 的论文问世 70 多年以来, 尽管有几位作者 (见 Bell 和 Shah[1], Bojanic 和 Elkins [3], 以及 Salvati [12]) 进行了数值上的探索, 但这个猜测的真伪尚属未知, 这个猜测迄今悬而未决的原因可能是由于如下事实 (i) 对于大的 n 值, 准确地确定 $E_{2n}(|x|)$ 绝非易事, 而且 (ii) 由 (1.11) 式确立的 $2nE_{2n}(|x|)$ 收敛到 β 的速度太慢.

近年来, Varga 和 Carpenter^[13] 在 1985 年指出 Bernstein 猜测不成立; 这个结论是基于 [13] 中给出的 β 的改进界限 (将在下节中讨论):

$$0.2801685460 \cdots = l_{20} \leq \beta \leq 2\mu_{100} = 0.2801733791 \cdots \quad (1.15)$$

因为 (1.15) 式中 β 的上界小于 $1/(2\sqrt{\pi}) = 0.2820947917 \cdots$, 因此 Bernstein 猜测 (1.14) 不成立! 下面 §1.2 中我们讨论高精度计算 $E_{2n}(|x|)$ 的问题, 而 §1.3 和 §1.4 介绍在 [13] 中根据 Bernstein 方法得到 Bernstein 常数 β 上、下界的方法. 在 §1.5 中, 我们讨论高精度数 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 的 Richardson 外插, 它给出了有 50 位有效数字的 β 估计值:

$$\begin{aligned} \beta = & 0.2801694990238691330364364 \\ & 9123067200004248213981236 \end{aligned} \quad (1.16)$$

在 §1.6 中我们讨论关于估计非负量 $\beta(\alpha)$ 这一更一般的问题, 其中

$$\beta(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{2\alpha} E_{2n}(x^\alpha; [0, 1]) \quad (\alpha > 0), \quad (1.17)$$

$\beta\left(\frac{1}{2}\right)$ 收敛到 (1.16) 中的常数 β . 最后作为本章的结束, 在 §1.7 中我们讨论对于 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 上的最佳一致有理逼近问题.

1.2 高精度计算 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$

令 π_{2n} 中的 $\hat{p}_{2n}(x)$ 是 $[-1, +1]$ 上函数 $|x|$ 的最佳逼近多项式; 即 (见 (1.3')),

$$\| |x| - \hat{p}_{2n}(x) \|_{L_\infty[-1, +1]} = E_{2n}(|x|) \quad (n = 1, 2, \cdots). \quad (2.1)$$

因为 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 区间上是偶函数, 根据 §1.1 的讨论, 其在 $[-1, +1]$ 上的最佳一致逼近多项式也是偶函数, 从而

$$\hat{p}_{2n}(x) = \sum_{j=0}^n a_j(n) x^{2j} \quad (n = 1, 2, \cdots). \quad (2.2)$$

我们做变量变换 $x^2 = t$, $t \in [0, 1]$, 于是我们的逼近问题变为:

$$E_{2n}(|x|) = E_n(\sqrt{t}; [0, 1]) := \inf \{ \| \sqrt{t} - h_n(t) \|_{L_\infty[0, 1]} : h_n \in \pi_n \}. \quad (2.3)$$

如果我们记

$$E_n(\sqrt{t}; [0, 1]) = \|\sqrt{t} - \hat{h}_n(t)\|_{L_\infty[0,1]} (\hat{h}_n \in \pi_n), \quad (2.4)$$

那么, 显然有 (见 (2.2))

$$\hat{p}_{2n}(x) = \hat{h}_n(x^2) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

因此, 确定 $E_{2n}(|x|)$ 和 $\hat{p}_{2n}(x)$ 等价于确定 $E_n(\sqrt{t}; [0, 1])$ 和 $\hat{h}_n(t)$.

利用下面的标准 (第二类) Remez 算法就可以解决 (2.3) 的极小化问题 (见 Meinardus [9, p. 105]).

第一步, 令 $S := \{t_j\}_{j=0}^{n+1}$ 是 $[0, 1]$ 上 $n+2$ 个离散点构成的集合, 它满足

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} \leq 1. \quad (2.6)$$

第二步, 找出唯一多项式 $h_n(t)$ 和常数 λ (这是一个线性问题) 使得

$$h_n(t_j) + (-1)^j \lambda = \sqrt{t_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1). \quad (2.7)$$

因此, $h_n(t)$ 在这个离散集 S 上 π_n 中对于 \sqrt{t} 的最佳一致逼近多项式, 而且在 S 的点 t_j 上其交错误差为 $|\lambda|$, 使用和 (2.3) 中类似的记号, 我们可以写

$$\|\sqrt{t} - h_n(t)\|_{L_\infty(S)} = E_n(\sqrt{t}; S) = |\lambda|. \quad (2.8)$$

由于 S 是 $[0, 1]$ 的子集, 故显然有

$$\|\sqrt{t} - h_n(t)\|_{L_\infty[0,1]} - |\lambda| \geq 0. \quad (2.9)$$

第三步, 事先给定 (小的) $\varepsilon > 0$, 如果 $\|\sqrt{t} - h_n(t)\|_{L_\infty[0,1]} - |\lambda| \leq \varepsilon$, 则迭代终止. 否则, 利用前面第二步, 在函数 $\sqrt{t} - h_n(t)$ 位于 $[0, 1]$ 区间上交替变号的局部极值点中找出一个新的集合 S' , 并重复第二和第三步, 如此等等.

从计算的观点说来, 知道由重复利用 Remez 算法产生的 $|\lambda|$ 序列是单调非减, 这一事实是很有用的.

从一个特殊的交错集 $S^{(0)} := \{t_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$,

$$t_j^{(0)} := \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{(n+1-j)\pi}{n+1} \right] \right\} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n+1) \quad (2.10)$$

开始, 其中 $t_j^{(0)}$ 是在 $[0, 1]$ 区间上 Chebyshev 多项式 $T_{n+1}(2t-1)$ 的 $n+2$ 个极值点, 并利用 Brent 的 MP 软件包 [4] 在肯特州立大学数学系的 Vax 11/780 上进行高精度计算, 当 $\|\sqrt{t} - h_n(t)\|_{L_\infty[0,1]}$ 和 $|\lambda|$ 重合到 100 位有效数字时, Remez 算法的迭代终止. 由于已知这种 (第二类) Remez 算法有二次收敛性, 因此对于每种所考虑的情况, 最多需要九次迭代. 考虑到保留位和可能存在的小的舍入误差, 我们相信我们得到的 $\{E_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 至少有 95 位有效数字.

表 1.1 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$

n	$2nE_{2n}(x)$	n	$2nE_{2n}(x)$
1	0.25000 00000 00000 00000	27	0.28010 92365 22206 18525
2	0.27048 35971 11137 10107	28	0.28011 34608 89950 28384
3	0.27557 43724 01175 38604	29	0.28011 72562 49499 61792
4	0.27751 78246 75052 69646	30	0.28012 06787 72662 82833
5	0.27845 11855 35508 60152	31	0.28012 37757 31660 88450
6	0.27896 79174 64958 70636	32	0.28012 65871 38731 91844
7	0.27928 29449 58518 02460	33	0.28012 91470 43904 51720
8	0.27948 88375 94507 44771	34	0.28013 14845 70012 61069
9	0.27963 06574 10128 20125	35	0.28013 36247 44030 04676
10	0.27973 24337 71973 82968	36	0.28013 55891 69271 11713
11	0.27980 79172 88743 87383	37	0.28013 73965 72336 69662
12	0.27896 54321 23793 27279	38	0.28013 90632 50782 89591
13	0.27991 02543 15557 69036	39	0.28014 06034 41582 48218
14	0.27994 58584 85782 13247	40	0.28014 20296 25997 94087
15	0.27997 46066 86407 49231	41	0.28014 33527 83104 08169
16	0.27999 81519 56316 72827	42	0.28014 45826 01611 08707
17	0.28001 76771 33297 25379	43	0.28014 57276 57645 50097
18	0.28003 40474 14993 50964	44	0.28014 67955 64600 41624
19	0.28004 79072 85905 85156	45	0.28014 77930 99959 13546
20	0.28005 97447 60423 15265	46	0.28014 87263 13048 74446
21	0.28006 99348 31809 43067	47	0.28014 96006 16931 43684
22	0.28007 87694 75287 53423	48	0.28015 04208 67046 95023
23	0.28008 64787 57075 57049	49	0.28015 11914 28744 92326
24	0.28009 32459 38808 50547	50	0.28015 19162 35465 27355
25	0.28009 92184 52382 83558	51	0.28015 25988 39017 81632
26	0.28010 45159 86556 70489	52	0.28015 32424 53163 84249

为了节省篇幅,在表 1.1 中给出了截断到 20 位有效数字后的 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 的值. 为的是表明该序列收敛是很慢的. (如果需要的话可以打印出 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 至 100 位有效数字).

看来表 1.1 中的乘积 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 已经收敛到 4 位有效数字, 按照 §1.6 中的渐近估计式, 若 $|2nE_{2n}(|x|) - \beta| < 10^{-10}$, 则必须 $n \geq 20968$. 这将需要在 $[0, 1]$ 上找出 \sqrt{t} 的至少 10484 阶最佳一致逼近多项式, 这是绝对令人生畏的计算工作.

1.3 计算 Bernstein 常数 β 的上界

为了得到 Bernstein 常数 β 的上界和下界, Bernstein 引进了下面的特殊函数

$$F(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{(t+2k+1)^2 - 1/4} \quad (t \geq 0). \quad (3.1)$$

利用 psi(双 γ 函数) 函数 (见 Whittaker 和 Watson [14, p.240])

$$\Psi(z) := \frac{d}{dz}(\log \Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad (3.2)$$

(3.1) 式中的函数 $F(t)$ 有表达式

$$F(t) = \frac{t}{2} \left\{ \Psi\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right) - \Psi\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) \right\} \quad (t \geq 0), \quad (3.3)$$

$F(t)$ 的其它表达式还包括 (见 [2])

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{t}{2t+1} H\left(1, 1; t + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) = t \int_0^1 \frac{z^{t-1/2} dz}{z+1} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-u} du}{\cosh(u/2t)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $H(a, b; c; z)$ 代表古典的超几何函数 (见 Henrici [7, p.56]). 在 (3.4) 式中最后的积分式表明 $F(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 严格增加, 且 $F(0) = 0$ 和 $F(\infty) = \frac{1}{2}$.

至此, 还看不出为什么 (3.1) 式中的函数 $F(t)$ 在确定 Bernstein 常数 β 中能起作用. 为了说明如何想出的这个函数, Bernstein 考虑了

下面的多项式插值问题. 对于每个固定的正整数 n , 考虑在 $[-1, +1]$ 中由下式给定的 $2n+1$ 个离散点

$$x_0 := x_0(2n) = 0; x_k := x_k(2n) := \cos \left[\frac{(k-1/2)\pi}{2n} \right] \quad (3.5)$$

$$(k = 1, 2, \dots, 2n),$$

因为点 $\{x_k\}_{k=1}^{2n}$ 恰恰是 Chebyshev 多项式 $T_{2n}(x)$ 的零点, 我们记

$$\omega(x) := \prod_{j=0}^{2n} (x - x_j) = x T_{2n}(x) / 2^{2n-1}. \quad (3.6)$$

如果 $R_{2n}(x)$ 代表在 π_{2n} 中唯一多项式, 它在 (3.5) 中给定的点上插值 $|x|$, 那么 $R_{2n}(x)$ 是 x 的偶多项式, 经过一定演算后, 它满足

$$|x| - R_{2n}(x) = \frac{T_{2n}(x)}{n} H_{2n}(x) \quad (x \in [0, 1]), \quad (3.7)$$

其中

$$H_{2n}(x) := - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin[(k+1/2)\frac{\pi}{2n}]}{x + \cos[(k+1/2)\frac{\pi}{2n}]} \quad (x \in [0, 1]). \quad (3.7')$$

经过很长的证明后, Bernstein^[2] 得到

$$|x| - R_{2n}(x) = \frac{T_{2n}(x)}{n} \left[F\left(\frac{2nx}{\pi}\right) + \eta_n(x) \right] \quad (x \in [0, 1]), \quad (3.8)$$

其中

$$|\eta_n(x)| \leq \frac{4 + \pi^2}{2n^{2/5}} \quad (x \in [0, 1]; n = 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

接下来, 按照定义

$$E_{2n}(|x|) \leq \| |x| - R_{2n}(x) \|_{L_\infty[-1, +1]} = \| |x| - R_{2n}(x) \|_{L_\infty[0, 1]},$$

最后一个不等式是由 $|x|$ 和 $R_{2n}(x)$ 都是偶函数这一事实得出的. 因为在 $[0, 1]$ 中 $|T_{2n}(x)| \leq 1$, 而且 $F(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 并有 $F(+\infty) = \frac{1}{2}$, 所以从 (3.8) 和 (3.9) 可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2n E_{2n}(|x|) \leq 2F(+\infty) = 1. \quad (3.10)$$

注意, 当用来改进 (1.6) 式时, (3.10) 式不如 (1.10) 好. 此外, (3.8) 式表明: 对于大的 n , 误差 $|x| - R_{2n}(x)$ 在 $[-1, +1]$ 区间内远不是等幅振荡. 因为 $F(t)$ 的严格递增性质隐含了最大的误差只能出现在 $x = \pm 1$ 的区域内而不可能出现在 $x = 0$ 的邻域内.

为了在 $x = 0$ 附近有等振荡性, Bernstein^[2] 建议如下, 对于任何偶数 n , 首先记

$$T_{2n}(x) = \cos(2n \arccos x) = \cos(2n \arcsin x). \quad (3.11)$$

其次, 对于固定的任意非负整数 m 和所有的 $n > m$, 令 $\left\{ \xi_k(2n) := \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{4n} \right] \right\}_{k=1}^m$ 是 $T_{2n}(x)$ 在 $[0, 1]$ 中 m 个最小的零点. 显然, 对于每个 $1 \leq k \leq m$, $T_{2n}(x)/(x^2 - \xi_k^2(2n))$ 是 π_{2n} 中的偶多项式, 于是由

$$Q_{2n}(x) := R_{2n}(x) + \frac{T_{2n}(x)}{n} \left\{ a_0 + \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2 \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{x^2 - \xi_k^2(2n)} \right\}, \quad (3.12)$$

定义的多项式 $Q_{2n}(x)$, 对于每个 $n > m$ 也是一个 π_{2n} 中的偶多项式. 除此之外, 令 $x = \pi b/(2n)$ 从 (3.8) 和 (3.12) 式可以得到, 对于每个 $n > m$,

$$\begin{aligned} |x| - Q_{2n}(x) &= \frac{T_{2n}(x)}{n} \left\{ F(b) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{b^2 - \left[\frac{2n}{\pi} \sin \left(\frac{(2k-1)\pi}{4n} \right) \right]^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta_n(x) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

对每个非负整数 m 现在我们定义

$$\begin{aligned} \mu_m &:= \inf_{\substack{a_0, a_1, \dots, a_m \\ \text{实}}} \left\{ \left\| \cos(\pi b) \left[F(b) - \left(a_0 \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{b^2 - \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2} \right) \right] \right\|_{L_\infty[0, +\infty)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

对于固定的 $b \geq 0$, 由 (3.11) 可得

$$T_{2n}(x) = \cos \left[2n \arcsin \left(\frac{\pi b}{2n} \right) \right] \rightarrow \cos(\pi b) \quad (n \rightarrow \infty).$$

类似于 (3.10) 可以验证

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2n E_{2n}(|x|) \leq 2\mu_m \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (3.15)$$

从 (3.14) 式可知正常数序列 $\{\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$ 显然是非增的:

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots, \quad (3.16)$$

因此是收敛的. Bernstein [2, p.55] 证明了 (1.11) 式中的 Bernstein 常数 β 和序列 $\{\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$ 的极限通过

$$\beta = 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m \quad (3.17)$$

连系起来, 由 (3.16), 每个逼近问题 (3.14) 的常数 μ_m 给出了如下 β 的上界

$$\beta \leq 2\mu_m \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (3.18)$$

有趣的是, 在 1913 年 Bernstein^[2] 对于 $m = 3$ 数值估计了 (3.14) 的解, 并发现 $\mu_3 < 0.143$, 于是

$$2\mu_3 < 0.286.$$

这就是在 (1.12) 中提到的 β 的上界 (在表 1.2 中可以找到 $2\mu_m$ 更精确的估计值).

表 1.2 $\{2\mu_m\}$

m	$2\mu_m$	m	$2\mu_m$
0	0.50000 00000 00000	10	0.28056 81480 84662
1	0.30981 66482 77486	20	0.28026 79181 28026
2	0.28964 46428 36759	30	0.28021 30013 47551
3	0.28458 56232 64382	40	0.28019 38951 81171
4	0.28268 16444 08752	50	0.28018 50827 23738
5	0.28177 99926 24272	60	0.28018 03067 66681
6	0.28128 65208 69723	70	0.28017 74317 42434
7	0.28098 84334 65837	80	0.28017 55680 33390
8	0.28079 50582 78109	90	0.28017 42915 00582
9	0.28066 26720 87176	100	0.28017 33791 01718

用来确定常数 μ_m 的 (3.14) 中的极小化问题是一个在 $[0, +\infty)$ 上 $F(b)$ 的特殊加权有理逼近问题, 然而 (3.14) 中的权 $\cos(\pi b)$ 在这个区间上肯定不是单一符号的. 但是, 正如 [13] 中指出的, (3.14) 中逼近问题的解具有有趣的振荡性质, 这就允许我们使用修正的 (第二种) Remez 算法 (应该强调 Bernstein 在 1913 年的工作 [2] 早于 1934 年出现的 Remez 算法 [10]). 利用修改后的 (第二种) Remez 算法解决了极小化问题 (3.14):

第一步. 令 $\tilde{S} := \{t_j\}_{j=0}^{m+1}$ ($m \geq 1$) 是在 $[0, +\infty)$ 中 $m+2$ 个离散点的点集, 满足

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq m - \frac{1}{2} < t_{m+1} =: +\infty. \quad (3.19)$$

第二步. 找 $m+2$ 个唯一常数 $\{a_i\}_{i=0}^m$ 和 λ (这是个线性问题) 使得

$$\begin{cases} \cos(\pi t_j) \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{t_j^2 - [(2k-1)/2]^2} + (-1)^{j+1} \lambda \right\} \\ = \cos(\pi t_j) F(t_j) \quad (j = 0, \dots, m), \\ a_0 + \lambda = \frac{1}{2} = F(+\infty), \end{cases} \quad (3.20)$$

线性问题 (3.20) 的解强迫函数

$$R_m(t) := \cos(\pi t) \left[F(t) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{t^2 - [(2k-1)/2]^2} \right) \right] \quad (3.21)$$

在 \tilde{S} 的子集 $\{t_j\}_{j=0}^m$ 上等幅振荡, 而且在点集 $\{t_j\}_{j=0}^m$ 上依次取交替的误差 $|\lambda|$. 此外, 强制 $R_m(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时在 $+|\lambda|$ 和 $-|\lambda|$ 之间振荡 (见图 1.1). 因此, 与 (2.8) 类似, 我们有

$$\|R_m(t)\|_{L_\infty(\tilde{s})} = |\lambda|, \quad (3.22)$$

并因为 \tilde{S} 是 $[0, +\infty)$ 的子集, 那么 (见 (2.9))

$$\|R_m(t)\|_{L_\infty[0, +\infty)} = |\lambda| \geq 0. \quad (3.23)$$

作为修正 Remez 算法下一步的基础, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ F(t) + \left(a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{t^2 - [(2k-1)/2]^2} \right) \right\} \\ &= F'(t) + 2t \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{[t^2 - [(2k-1)/2]^2]^2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

如果 (3.20) 的解 $a_k (0 \leq k \leq m)$ 和 λ 都是正数, (3.24) 式及 $F(t)$ 的严格增加性质给出

$$G_m(t) := F'(t) - \left(a_0 + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{t^2 - [(2k-1)/2]^2} \right)$$

在区间 $\left(m - \frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上从 $-\infty$ 严格增加到 $+\lambda$. 定义 $\tau_m = \tau_m(\tilde{S})$ 是 t 在 $\left(m - \frac{1}{2}, +\infty\right)$ 中使 $G_m(\tau_m) = -\lambda$ 成立的唯一解, 那么由于 $|R_m(t)| = |\cos(\pi t) \cdot G_m(t)| \leq |G_m(t)| \leq \lambda$ 对所有 $t \geq \tau_m$ 成立, 并且因为当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $G_m(t) \rightarrow \frac{1}{2} - a_0 = \lambda$, 可以得到

$$\|R_m(t)\|_{L_\infty[\tau_m, +\infty)} = |\lambda|.$$

另一方面, 因为 $\{t_j\}_{j=0}^m$ 是 $\left[0, m - \frac{1}{2}\right]$ 的一个子集, 从 (3.22) 则有 $\|R_m(t)\|_{L_\infty[0, m - \frac{1}{2}]} \leq |\lambda|$. 又因为 $\left[0, m - \frac{1}{2}\right]$ 是 $[0, \tau_m]$ 的一个子集,

$$\|R_m(t)\|_{L_\infty[0, \tau_m(\tilde{S})]} = \|R_m(t)\|_{L_\infty[0, +\infty)}, \quad (3.25)$$

然后更强的命题

$$\|R_m(t)\|_{L_\infty[0, m-1/2]} = \|R_m(t)\|_{L_\infty[0, +\infty)} \quad (3.25')$$

是否也成立可以由数值上确定. (迄今为止在确定 β 上界的文献中所处理的特殊情况为: Bojanic 和 Elkins [3] 处理了 $m = 1$ 的情况. Bernstein [2] 处理了 $m = 3$ 的情况. \tilde{S} 集的选法都使得在第二步中的 $a_k (0 \leq k \leq m)$ 和 λ 为正的, 在这些情况下 (3.25') 式也成立). 这使我们有

第三步, 预先给定 (小的) $\varepsilon > 0$, 如果第二步的解 $\{a_k\}_{k=0}^m$ 和 λ 全是正数, 且 (3.25') 成立, 并有

$$\|R_m(t)\|_{L_\infty[0, m-1/2]} - \lambda < \varepsilon,$$

则迭代终止. 否则, 在 $(0, m - \frac{1}{2}]$ 中找一个新的集合 \tilde{S}' , 它由 $R_m(t)$ 的 m 个局部极值点 (交错变号的) 再加上 $t_0 := 0$ 和 $t_{m+1} := \infty$ 构成. 然后再重复第二、第三步, 如此继续下去.

从一个具体的集合 $\tilde{S}^{(0)} := \{t_j^{(0)}\}_{j=0}^{m+1}$ 开始, 其中

$$t_0^{(0)} := 0; t_j^{(0)} = \frac{2j-1}{2} (j = 1, 2, \dots, m); t_{m+1}^{(0)} := +\infty, \quad (3.26)$$

用部分主元素的高斯消去法解出相应的线性方程组 (3.20), 得到 $\{a_k^{(0)}\}_{k=0}^m$ 和 $\lambda^{(0)}$. 对于表 1.2 所考虑的情况, \tilde{S} 的开始值 (3.26) 都足够好, 使得前面所述的修改 Remez 算法永远给出正的 $\{a_k\}_{k=0}^m$ 和 λ , 以及满足 (3.19) 和 (3.25') 的交替集. 此外, 正如所希望的那样, 该算法的收敛性是二次的, 在所考虑的情况中最多需要迭代十次修正 Remez 算法.

在图 1.1 中, 我们画出 (3.21) 中的函数 $R_5(t)$ 以及 (3.14) 中最佳一致逼近常数 μ_5 . 该图中有六个交错点 (用小黑点标出), 并在 $(9/2, +\infty)$ 上振荡, 当 $t \rightarrow \infty$ 时它趋于 μ_5 .

遗憾的是, 上述计算不能和 §1.2 中计算 $\{2nE_{2n}(|x|)_{n=1}^{52}\}$ 具有同样高的精确度 (100 位有效数字). 原因之一是把修正 Remez 算法用于极小化问题 (3.14) 时需要反复算出 (3.1) 式中函数 $F(t)$ 的值. 这里, 我们用了 $F(t)$ 的表达式 (3.3), 其中用到了 psi 函数 $\Psi(x)$. 而 $\Psi(x)$ 是用 Cody, Strecok, 和 Thacher [6] 中给出的近似式

$$\Psi(x) \doteq (x - x_0)r_{8,8}(x), \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right), \quad (3.27)$$

其中 $x_0 = 1.46163 \dots$ 是 $\Psi(x)$ 的唯一正零点, 已知其 40 位有效数字, 并且 $r_{8,8}(x)$ 是两个 x 的 8 次特殊多项式的比 (取自 [6]); 还用到了

$$\Psi(x) \doteq \ln x - \frac{1}{2x} + r_{6,6}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (x \leq 3 < \infty), \quad (3.28)$$

其中 $r_{6,6}(u)$ 是两个 u 的 6 次特殊多项式的比 (取自 [6]). 对于 $0 < x \leq \frac{1}{2}$, 我们利用熟知的递推关系式

$$\Psi(x) = \Psi(x+1) - \frac{1}{x} \quad (3.29)$$

和近似式 (3.27).

上面给出 $\Psi(x)$ 逼近式可以准确到大约 20 位有效数字 (见 [6]) 所以我们估计我们算出的 $\{2\mu_m\}_{m=0}^{\infty}$ 至少精确到 15 位有效数字. 为了省纸, 在表 1.2 中给出了 $\{2\mu_m\}_{m=0}^{100}$ 的一个子集, 它们全都截断到 15 位有效数字.

从表 1.2 以及 (1.13) 和 (3.16)–(3.17) 显然可以看出

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.2820947917\cdots > 2\mu_5 > \beta, \quad (3.30)$$

这就是说 Bernstein 猜测不成立!

1.4 计算 Bernstein 常数的下界

已经看出, 在 §1.3 中我们计算的 Bernstein 常数 β 的上界 $\{2\mu_m\}_{m=0}^{100}$ 足以否定 Bernstein 猜测 (1.14). 因此, 就 Bernstein 猜测本身确立与否来说, 显然没有必要再去计算 β 的下界. 但是为了使我们的讨论至臻完美, 这里我们从 Bernstein 另一个明快的方法出发, 讨论一下有关 β 下界的计算问题. β 下界的计算证明我们所完成的计算工作是十分艰辛的.

为了叙述确定 β 下界的 Bernstein 方法 [2], 我们定义

$$\phi_m := \prod_{j=1}^{m-1} (x^2 - j^2) \quad (m \geq 1) \quad (4.1)$$

和

$$\begin{aligned} \psi_m(x) &= \psi_m(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \\ &:= \prod_{j=1}^m (x^2 - \lambda_j^2) \quad (m \geq 1), \end{aligned} \quad (4.2)$$

(这里我们采用习惯用法 $\prod_{j=\beta}^{\alpha} := 1$, 如果 $\alpha < \beta$), 并假定 (4.2) 中的参数 λ_j 满足

$$j-1 < \lambda_j < j, \quad (j \geq 1). \quad (4.3)$$

对于每个 $m \geq 1$, 设

$$B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) := \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\phi_m(\lambda_i)}{\psi'_m(\lambda_i)} \left[1 - \left(\frac{2\lambda_i}{\lambda_i + \frac{1}{2}} \right) F\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \right]}{\sum_{i=1}^m \frac{\phi_m(\lambda_i)}{\psi'_m(\lambda_i)} \left[\frac{2}{\pi\lambda_i} + \tan\left(\frac{\pi}{2}[\lambda_i - i + 1]\right) \right]}, \quad (4.4)$$

其中函数 $F(t)$ 的定义在 (3.1) 式中. 从 (4.1) 和 (4.2) 式, 我们可以写

$$\frac{\phi_m(\lambda_i)}{\psi'_m(\lambda_i)} = \frac{\prod_{j=1}^{i-1} (\lambda_i^2 - j^2) \cdot \prod_{j=i}^{m-1} (j^2 - \lambda_i^2)}{2\lambda_i \prod_{j=1}^{i-1} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \cdot \prod_{j=i+1}^m (\lambda_j^2 - \lambda_i^2)} \quad (1 \leq i \leq m). \quad (4.5)$$

再考虑到条件 (4.3), 我们可以看出上述各比值均为正的. 因为 $F(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是严格增函数, 且 $F(0) = 0$ 和 $F(+\infty) = \frac{1}{2}$ (见 §1.3), 我们导出 (4.4) 式中每个和式中的诸项必是正的, 于是得到 $B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) > 0$.

如果用 (1.11) 式中定义的 β , Bernstein^[2] 证明了 $B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 是 β 的一个下界, 即,

$$\beta \geq B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \quad (4.6)$$

对每个正整数 m 和满足 (4.3) 式的 $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$, 上式都成立. 对于每个 $m \geq 1$, β 的最好下界显然是:

$$l_m := \max\{B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \{\lambda_j\}_{j=1}^m \text{ 满足 (4.3)}\}, \quad (4.7)$$

于是

$$\beta \geq l_m > 0, \quad (m \geq 1). \quad (4.8)$$

下面考虑满足 (4.3) 的任一组参数 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m+1}$, 固定 $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ 并让 λ_{m+1} 减到 m , 从 (4.4) 和 (4.5) 式可以很快地验证

$$\lim_{\lambda_{m+1} \rightarrow m} B_{m+1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}) = B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m). \quad (4.9)$$

最后, 我们可以从 (4.7) 看到

$$l_{m+1} \geq l_m \quad (m \geq 1), \quad (4.10)$$

所以根据 (4.8), $\{l_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是一个有界非减的正数序列. Bernstein^[2] 进一步证明了这个序列的极限是 β :

$$\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} l_m. \quad (4.11)$$

实际上 Bernstein 在 [2] 中数值估计了 l_1 和 l_2 , 并发现

$$l_1 > 0.27 \quad \text{和} \quad l_2 > 0.278. \quad (4.12)$$

这个 l_2 的估计式作为 (1.12) 式中 β 的下界. (可以在表 1.3 中找到 l_1 和 l_2 更精确的估计值),

表 1.3 $\{l_m\}_{m=1}^{20}$

m	l_m			m	l_m		
1	0.27198	23590	30477	11	0.28016	34641	87524
2	0.27893	09228	49406	12	0.28016	48933	27009
3	0.27981	10004	37231	13	0.28016	59052	38063
4	0.28002	43339	28903	14	0.28016	66415	27680
5	0.28009	77913	15214	15	0.28016	71898	92928
6	0.28012	91830	79687	16	0.28016	76066	00825
7	0.28014	46910	09336	17	0.28016	79288	71653
8	0.28015	31877	11753	18	0.28016	81819	90114
9	0.28015	82176	99044	19	0.28016	83835	39180
10	0.28016	13794	71687	20	0.28016	85460	02042

现在叙述我们所算的 l_m 下界. 从 (4.4) 显然看出参数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 在 $B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 的定义中是非线性地出现. 我们用了非常标准的不带导数的优化 (极大化) 子程序, 来确定满足约束 (4.3) 的参数 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$, 它们使 $B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 极大化, 因此确定了 (4.7) 式中的 l_m . 又因为函数 $F(t)$ 显式地出现在 (4.4) 式中的 $B_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 的定义中, 我们用 psi 函数 $\Psi(t)$ 的逼近式 (3.27)–(3.29) 和用 $\Psi(t)$ 表示 $F(t)$

的表达式 (3.3). 和计算 β 的上界 $2\mu_m$ 时一样 (见 (3.17)), 我们计算 β 的下界 l_m 不能和在 §1.2 中计算 $2nE_{2n}(|x|)$ 时具有同样高的精确度 (95 位有效数字). 因为用于 §1.3 中数值计算结果的类似理由, 对于 $\Psi(t)$ 的逼近达到大约 20 位有效数字, 我们估计优化计算 $\{l_m\}_{m=1}^{20}$ 的结果至少有 15 位有效数字. 在表 1.3 中给出了 $\{l_m\}_{m=1}^{20}$, 它们都被截断到 15 位有效数字.

当比较表 1.2 中的上界和表 1.3 中的下界时, 我们看到 (4.8) 式中的下界 l_m 比 (3.17) 式的上界 $2\mu_m$, 对于每个 $1 \leq m \leq 20$, 都精确的多. 事实上, l_{20} 近似 β 的误差大约是 $9.53 \cdot 10^{-7}$, 而 $2\mu_{100}$ 近似 β 的误差仅为 $3.88 \cdot 10^{-6}$. 至今, 这种高精度是靠用我们的优化子程序找 l_m 时增加所需的计算机时间取得的. 近似 β 的下界 l_m 有较大的精度也解释了为什么表 1.3 中 m 的值没有达到像表 1.2 中算上界 $2\mu_m$ 时那样高.

1.5 数 $\left\{2n \sum_{2n}(|x|)\right\}_{n=1}^{52}$ 的 Richardson 外插

在表 1.1 中数 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 表明这些数收敛到 Bernstein 常数 β 是很慢的 (见 (1.11)). 改进收敛慢的序列收敛性的典型方法是 Richardson 外插方法 (见 Brezinski [5, p.7]). 它可以描述如下, 如果 $\{S_n\}_{n=1}^N$, 其中 $N > 2$, 为一给定 (有限的) 实数序列, 设 $T_0^{(n)} := S_n (1 \leq n \leq N)$ 并称 $\{T_0^{(n)}\}_{n=1}^N$ 为 Richardson 外插表的第零列, 它由 N 个数组成. Richardson 外插表的第一列由 $N-1$ 个数构成, 其定义如下

$$T_1^{(n)} := \frac{x_n T_0^{(n+1)} - x_{n+1} T_0^{(n)}}{x_n - x_{n+1}}, \quad (1 \leq n \leq N-1). \quad (5.1)$$

按归纳法, Richardson 外插表的第 $k+1$ 列由 $N-k-1$ 个数构成. 对每个 $k = 0, 1, \dots, N-2$ 定义为:

$$T_{k+1}^{(n)} := \frac{x_n T_k^{(n+1)} - x_{n+k+1} T_k^{(n)}}{x_n - x_{n+k+1}} \quad (1 \leq n \leq N-k-1), \quad (5.2)$$

其中 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 是给定的常数. 按这种方法, 建立了一个由 $N(N+1)/2$ 个元素构成的三角形的表. 在我们计算 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 的情况下,

由 1378 个元素构成的三角形表被算出. 为了选择 (5.1)–(5.2) 中的数 $\{x_n\}_{n=1}^{52}$, 前期计算表明 $2nE_{2n}(|x|) = \beta + K/n^2 +$ 低阶项, 所以选 $x_n := \frac{1}{n^2}$. 我们要说明, 在 (5.1) 和 (5.2) 式中分数里的分子、分母的减法可能造成精确度的损失, 这件事提醒我们计算 $2nE_{2n}(|x|)$ 时应当以很高的精度完成 (95 位有效数字).

$\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 的 Richardson 外插产生了意想不到的好结果. 这里不准备给出整个由 1378 个数构成的外插表 (比如说每个数给出到 95 位有效数字), 看来给出这个表的最后 20 列就足够了. 在这些列中全部 210 个数里除 3 个以外都和 (1.16) 式中的 β 近似值重合到前 45 位数字.

$$\beta = 0.2801694990238691330364364$$

$$9123067200004248213981236$$

此外, 在该 Richardson 外插表中最后 20 列的 210 个数中有 182 个数的前 50 位十进数和 (5.3) 式中 β 的近似值完全重合!

1.6 某些未解决的问题

Richardson 外插 (用 $x_n := \frac{1}{n^2}$) 成功地用于 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 强烈地提示 $2nE_{2n}(|x|)$ 可能有如下形状的渐近展开 (见 Henrici [7, p.155])

$$2nE_{2n}(|x|) \approx \beta - \frac{K_1}{n^2} + \frac{K_2}{n^4} - \frac{K_3}{n^6} + \cdots (n \rightarrow \infty), \quad (6.1)$$

其中常数 K_j 与 n 无关. 假定 (6.1) 式成立, 可得出

$$n^2(2nE_{2n}(|x|) - \beta) \approx -K_1 + \frac{K_2}{n^2} - \frac{K_3}{n^4} + \cdots (n \rightarrow \infty). \quad (6.2)$$

用已经得到的表 1.1 中 $2nE_{2n}(|x|)$ 的高精度近似和 $\{2nE_{2n}(|x|)\}_{n=1}^{52}$ 外插表最后一个元素确定的 β 估计值, 我们可以再次对 $\{n^2(2nE_{2n}(|x|) - \beta)\}_{n=1}^{52}$ (用 $x_n = \frac{1}{n^2}$) 进行 Richardson 外插以便得出 (6.2) 式中 K_1 的外插估计值. 这个 bootstrapping 过程可以通过 Richardson 外插继续得到 (6.1) 中后续的常数 K_j . 正如所担心的那样, 在连续确定常数 K_j 的进程中, 数值精度逐渐有所损失.

在表 1.4 中我们列出了估计值 $\{K_j\}_{j=1}^{10}$ 并插入到十位有效数字. 正如表 1.4 所指出的, 后面的常数 K_j 增加很快. 因为这些常数都变为正数, 我们有下面新的猜测

表 1.4 $\{K_j\}_{j=1}^{10}$

j	K_j		j	K_j	
1	0.04396	75288 8	6	0.59543	53151
2	0.02640	71687 7	7	2.92591	5470
3	0.03125	34264 6	8	18.49414	033
4	0.05889	00165 7	9	146.94301	23
5	0.16010	69971	10	1438.03271	7

猜测 (Varga 和 Carpenter [13]): $2nE_{2n}(|x|)$ 有如下形的渐近展式

$$2nE_{2n}(|x|) \approx \beta - \frac{K_1}{n^2} + \frac{K_2}{n^4} - \frac{K_3}{n^6} + \cdots (n \rightarrow \infty), \quad (6.3)$$

其中常数 K_j (与 n 无关) 都是正的.

因为 Bernstein 常数 β 和函数 $F(t)$ 具体的有理逼近有联系 (见 (3.16)), 这里 $F(t)$ 可以用古典的超几何函数表示 (见 (3.4)). 指望着常数 β 以及 (6.3) 式中的 K_j 可能有由古典超几何函数和 / 或已知的数学常数给出的封闭表达式并非不合理的.

最后, 在 1913 年 Bernstein 的论文 [2] 的最后, 他说: 他对 $E_{2n}(|x|; [-1, +1])$ 性态的分析可以推广到对于任何 $\alpha > 0$ $E_{2n}(|x|^{2\alpha}; [-1, +1])$ 的性态上去, 即, 存在有正常数 $\beta(\alpha)$ 使得

$$\begin{aligned} \beta(\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{2\alpha} E_{2n}(|x|^{2\alpha}; [-1, +1]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{2\alpha} E_n(x^\alpha; [0, 1]) \quad (\alpha > 0). \end{aligned} \quad (6.4)$$

和 (2.3) 式一样, 这里最后一个不等式是从 $|x|^{2\alpha}$ 在 $[-1, +1]$ 上偶性得出的. 因此, 用这种符号, 本章前面几节仅在于估计 $\beta(1/2)$ 并在 (5.3) 中给出.

奇怪的是, 在 1913 年发表论文 [2] 的 25 年之后, 于 1938 年 Bernstein 再次研究了这些问题, 某些关于函数 $\beta(\alpha)$ 相当重要的结果

发表在 [20] 或 [21] 中, 利用大量有趣的但是困难的技术, 在 [20] 中 Bernstein 给出了上界

$$\beta(\alpha) < \frac{\Gamma(2\alpha)|\sin(\pi\alpha)|}{\pi} \quad (\alpha > 0), \quad (6.5)$$

以及下界

$$\frac{\Gamma(2\alpha)|\sin(\pi\alpha)|}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2\alpha-1}\right) < \beta(\alpha) \quad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right), \quad (6.6)$$

由这个式子得出, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, 精确的渐近式

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\beta(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)|\sin(\pi\alpha)|/\pi} = 1. \quad (6.7)$$

在 [20] 中他还给出

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \beta(\alpha) = \frac{1}{2} =: \beta(0). \quad (6.8)$$

表 1.5 到 40 位十进数的 $\beta(\alpha)$ 估计值

α	$\beta(\alpha)$
0.000	5.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000E-01
0.125	3.92106 06865 24306 18102 87889 06500 29516 74073E-01
0.250	3.48648 23272 56100 43273 50066 60904 27053 37181E-01
0.375	3.15241 27414 61107 18764 66738 56654 82499 32994E-01
0.500	2.80169 49902 38691 33036 43649 12306 72000 04248E-01
0.625	2.36444 76483 36463 84095 46777 48284 40668 05347E-01
0.750	1.78360 33169 26983 67018 81533 55271 40747 72851E-01
0.875	1.00876 79735 91345 44168 60888 21616 98102 46483E-01
1.000	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000E+00
1.250	2.74965 97507 96998 83110 43751 61314 34800 90980E-01
1.500	5.91106 95862 73252 18719 17623 47676 77064 56234E-01
1.750	7.00436 70509 81847 47876 41483 52647 24759 44023E-01
2.000	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000E+00
2.250	2.48295 48477 65220 75909 82753 63988 73708 98876E+00
2.500	7.28031 92389 13027 78383 71440 91741 94820 71406E+00
2.750	1.12733 90258 80507 55856 52198 44242 73647 99596E+01
3.000	0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00000E+00

Bernstein 给出的结果 (6.5)–(6.8) 可能是他企图找到对于 $\alpha > 0$ $\beta(\alpha)$ 的封闭形式. 但除了 (6.8) 式中 $\beta(0)$ 以及 (5.3) 式中的 $\beta(1/2)$ 这些特殊值之外, 在文献中尚没有 $\beta(\alpha)$ 的其他值. 然而近来 Carpenter 和 Varga^[22] 像上节那样, 又利用高精度计算和插值确定了当 α 取某些值时 $\beta(\alpha)$ 的结果, 并至少有 40 位十进数, 这些结果列在表 1.5 中.

尽管对于这个问题进行了很多理论和计算工作, 当 $\alpha > 0$ 时 $\beta(\alpha)$ 的封闭表达式是什么依然是一个悬而未决的问题!

1.7 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 上的有理逼近

因为本章前几节都是研究 Bernstein 猜测的, 即, 函数 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 上的最佳一致多项式逼近的问题. 在本章我们最后考虑 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 上最佳一致有理逼近的问题是很自然的. 需要新增加一些符号, 对任何一个非负整数 n , 令 $\pi_{n,n}$ 代表所有有理函数 $r_{n,n}(x) = p(x)/q(x)$ 的集合, 而 $p \in \pi_n$ 和 $q \in \pi_n$. (这里假定 p 和 q 没有公因子, q 在 $[-1, +1]$ 上不取值零, 而且 q 由 $q(0) = 1$ 正规化), 对于定义在 $[-1, +1]$ 上的实函数 $f(x)$, 和 (1.3) 类似地, 我们定义

$$E_{n,n}(f) := \inf\{\|f - r_{n,n}\|_{L_\infty[-1,+1]} : r_{n,n} \in \pi_{n,n}\}. \quad (7.1)$$

有趣的是, 虽然 Bernstein 在 1913 年就深入地考虑了 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 上最佳一致逼近多项式的渐近性态, 但在 50 年后的 1964 年 D.J. Newman 才指出 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 上的最佳一致有理逼近的性质是何等的不同. Newman 构造性地证明了

$$\frac{1}{2e^{9\sqrt{n}}} \leq E_{n,n}(|x|) \leq \frac{3}{e^{\sqrt{n}}} \quad (n = 4, 5, \dots). \quad (7.2)$$

Newman 不等式 (7.2) 提出了研究课题, 按照 Bernstein 早期关于当 $n \rightarrow \infty$ 时 $E_n(|x|)$ 的渐近性态研究的路子, 这些有价值的研究工作中的一部分集中于, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 准确地描述 $E_{n,n}(|x|)$ 的渐近性态.

Gonchar^[8] 和其它作者对于 $E_{n,n}(f)$ 渐近性态的一般理论已经做出了几个重要的贡献. 对于特殊的 $E_{n,n}(|x|)$ 来说, Bulanov^[6] 已给出了当前最好的结果, 他证明了

$$E_{n,n}(|x|) \geq e^{-\pi\sqrt{n+1}} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (7.3)$$

Vjacheslavov 在 [18] 中证明了存在正常数 M_1 和 M_2 使得

$$M_1 \leq e^{\pi\sqrt{n}} E_{n,n}(|x|) \leq M_2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.4)$$

显然, (7.3) 和 (7.4) 包含了

$$e^{\pi(1-\sqrt{2})} = 0.27218 \dots \leq e^{\pi\sqrt{n}} E_{n,n}(|x|) \leq M_2 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.5)$$

并且, 如果

$$\begin{aligned} \underline{M} &:= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\pi\sqrt{n}} E_{n,n}(|x|), \\ \overline{M} &:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} e^{\pi\sqrt{n}} E_{n,n}(|x|), \end{aligned} \quad (7.6)$$

则有

$$1 \leq \underline{M} \leq \overline{M}. \quad (7.7)$$

(7.4) 式的结果明白地给出了当 $n \rightarrow \infty$ 时 $E_{n,n}(|x|)$ 渐近式中 \sqrt{n} 的在渐近意义下的最好的系数, 即为 π . 剩下的只是确定 (7.7) 中最佳渐近常数 \underline{M} 和 \overline{M} .

为了看到这个问题的内涵, 我们在这里介绍由 Varga, Ruttan 和 Carpenter[17] 所做的最新的高精度计算 $\{E_{n,n}(|x|)\}_{n=1}^{40}$ 所得到的结果. 和在 §1.2 中计算多项式的情况一样, 对于每个非负整数 n , 在 $\pi_{n,n}$ 中对于 $|x|$ 在区间 $[-1, +1]$ 上的最佳一致逼近是唯一的 (见 [11, p.158]), 比如说用 $\hat{r}_{n,n}(x)$ 表示它, 于是

$$E_{n,n}(|x|) = \||x| - \hat{r}_{n,n}(x)\|_{L_\infty[-1, +1]} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.8)$$

又因为 $|x|$ 在 $[-1, +1]$ 上是偶函数, 所以 $\hat{r}_{n,n}(x)$ 也是偶函数, 并可以证明 (见 (1.5))

$$E_{2n, 2n}(|x|) = E_{2n+1, 2n+1}(|x|) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.9)$$

于是, 对我们来说, 只考虑 $\{E_{2n, 2n}(|x|)\}_{n=0}^\infty$ 减小到零的方式就足够了.

如果对于每个 $n = 1, 2, \dots$ $\hat{h}_{n,n}(t) \in \pi_{n,n}$ 是 $\pi_{n,n}$ 中在 $[0, 1]$ 区间上 \sqrt{t} 的最佳一致逼近, 也就是说, 如果

$$\begin{aligned} E_{n,n}(\sqrt{t}; [0, 1]) &= \inf_{r_{n,n} \in \pi_{n,n}} \|\sqrt{t} - r_{n,n}(t)\|_{L_\infty[0, 1]} \\ &= \|\sqrt{t} - \hat{h}_{n,n}(t)\|_{L_\infty[0, 1]}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

那么容易证明 (见 (2.4))

$$E_{2n,2n}(|x|) = E_{n,n}(\sqrt{t}; [0, 1]) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.11)$$

其中

$$\hat{r}_{2n,2n}(x) = \hat{h}_{n,n}(x^2) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.12)$$

根据 (7.12) 可以直接从高精度计算 $\{E_{n,n}(\sqrt{t}; [0, 1])\}_{n=1}^{40}$ 得出 $\{E_{2n,2n}(|x|)\}_{n=1}^{40}$ 的估计值, 和 §1.2 中一样这样的计算又涉及到 (第二种) Remez 算法并用到 Brent MP 软件包中, 直到 250 位有效数字的运算, 又考虑到保留位和可能出现的舍入误差, 我们相信 $\{E_{n,n}(\sqrt{t}; [0, 1])\}_{n=1}^{40}$ 准确到 200 位有效数字. 截断到 25 位后的 $\{E_{2n,2n}(|x|)\}_{n=21}^{40}$ 和 $\{e^{\pi\sqrt{2n}}E_{2n,2n}(|x|)\}_{n=21}^{40}$ 的数值如表 1.6 所示.

表 1.6

n	$E_{2n,2n}(x ; [-1, +1])$	$e^{\pi\sqrt{2n}}E_{2n,2n}(x ; [-1, +1])$
21	9.6011226128422364808987184e-9	6.6756165126491228856564179
22	5.9708233987055580552986137e-9	6.7032142882249977256424257
23	3.7523813816413163690864502e-9	6.7291099634760209110520998
24	2.3814996907217830892279694e-9	6.7534733658511869861964983
25	1.5254732895109793748147207e-9	6.7764513791852569033345348
26	9.8567633494963529958137413e-10	6.7981717950311136695770741
27	6.4213580507266246923653248e-10	6.8187464002912796750796788
28	4.2158848429927145758285061e-10	6.8382734742229698180371438
29	2.7883241651339275411060214e-10	6.8568398240938623267702634
30	1.8570720011628217953125707e-10	6.8745224571336711172475540
31	1.2450783250744235910902360e-10	6.8913899632991017639054615
32	8.4005997557762786343216049e-11	6.9075036662673253080419612
33	5.7022115757288620263774447e-11	6.9229185872920030400076656
34	3.8929505815993459443909823e-11	6.9376842569099166681845857
35	2.6724435566456537363975894e-11	6.9518454021392401752909853
36	1.8442995092525441602503777e-11	6.9654425311662094614637204
37	1.2792448409247089881993010e-11	6.9785124331456697053440800
38	8.9163582949186860871201939e-12	6.9910886073298323319862475
39	6.2438281549962812624730424e-12	7.0032016330585887701672461
40	4.3920484091817861898391037e-12	7.0148794900233669056665337

和 §1.5 一样, 我们对数 $\{e^{\pi\sqrt{2n}}E_{2n,2n}(|x|)\}_{n=1}^{21}$ 采用了几种不同的外插技术, 如 Richardson 外插, Aitken Δ^2 外插等等. (见 Brezinski [5]) 我们的最好结果是取 $x_n = 1/\sqrt{n}$ 并采用 Richardson 外插得到的. 在表 1.7 中给出了 $\{e^{\pi\sqrt{2n}}E_{2n,2n}(|x|)\}_{n=21}^{40}$ 的第九和第十次 Richardson 外插的结果. 表 1.7 中第九、第十次 Richardson 外插结果分别为严格减和严格增的. 根据表 1.7 的外插结果 Varga, Ruttan 和 Carpenter 在 [17] 中做了一个数值上很合逻辑的猜测.

$$\text{猜测: } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\pi\sqrt{2n}}E_{2n,2n}(|x|) \stackrel{?}{=} 8. \quad (7.13)$$

非常有趣的是, Herbert Stahl 教授曾向文献 [17] 的作者索取他们的数值结果, 这些结果显示出最佳一致有理逼近的误差, 即在 $[0, 1]$ 上 $E_{n,n}(\sqrt{x}; [0, 1])$ 的极值点的分布. 这些数值结果看来对他很有用处; 在 [23] 中 Stahl 能从理论上确认 (7.13) 中的猜测是正确的!

最后, 完全类似 §1.6 中的讨论, 在 (7.13) 之后自然要问对于任何 $\alpha > 0$ 是否有当 $n \rightarrow \infty$ 时关于 $E_{n,n}(x^\alpha; [0, 1])$ 最佳性质的结果. 最近 Varga 和 Carpenter 在 [24] 中给出了这方面的结果.

表 1.7

$\{\tau_n\}_{n=21}^{40}$ 的第九次 Richardson 外插值	$\{\tau_n\}_{n=21}^{40}$ 的第十次 Richardson 外插值
8.0000000004818513852150904	7.9999999993370575957653022
8.0000000002792857242205205	7.9999999996174919169009855
8.0000000001662223537658992	7.9999999997766671415448461
8.0000000001018861846283786	7.9999999998673924596859198
8.0000000000644065954058002	7.9999999999194597844657179
8.0000000000419621984410583	7.9999999999496419688750299
8.0000000000280990775511207	7.9999999999673808389086599
8.0000000000192489204346099	7.9999999999779992400786189
8.0000000000134077625530325	7.9999999999845068292101649
8.0000000000094285808538428	7.9999999999886129550248035
8.0000000000066398157884231	

参考文献

- [1] R.A. Bell and S.M. Shah, *Oscillating polynomials and approximations to $|x|$* , Publ. of the Ramanujan Inst. **1** (1969), 167-177.
- [2] S. Bernstein, *Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynômes de degré donnés*, Acta Math. **37** (1913), 1-57.
- [3] R. Bojanic and J.M. Elkins, *Bernstein's constant and best approximation on $[0, \infty)$* , Publ. de l'Inst. Mat., Nouvelle série, **18** (32) (1975), 19-30.
- [4] Richard P. Brent, *A FORTRAN multiple-precision arithmetic package*, Assoc. Comput. Mach. Trans. Math. Software **4** (1978), 57-70.
- [5] C. Brezinski, *Algorithms d'Accélération de la Convergence*, Éditions Technip, Paris, 1978.
- [6] A.P. Bulanov, *Asymptotics for least deviation of $|x|$ from rational functions* (in Russian), Mat. Sbornik **76** (118) (1968), 288-303. English translation in Math. USSR Sbornik **5** (1968), 275-290.
- [7] W.J. Cody, A.J. Strecok, H.C. Thacher, Jr., *Chebyshev approximations for the psi function*, Math. Comp. **27** (1973), 123-127.
- [8] A.A. Gonchar, *Estimates of the growth of rational functions and some of their applications* (in Russian), Mat. Sbornik **72** (114) (1967), 489-503. English translation in Math. USSR Sbornik **1** (1967), 445-456.
- [9] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, vol.2., John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [10] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Dissertation, University of Göttinge 1911.
- [11] G. Meinardus, *Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods*, Springer-Verlag Inc., New York, 1967.
- [12] D.J. Newman, *Rational approximation to $|x|$* , Michigan Math. J. **11** (1964), 11-14.
- [13] E. Ya. Remez, *Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tchebichef*, C.R.Acad. Sci. Paris **199** (1934), 337-340.
- [14] T.J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Mass., 1969.

- [15] D.A. Salvati, *Numerical Computation of Polynomials of Best Uniform Approximation to the Function $|x|$* , Master's Thesis, Ohio State University, Columbus, Ohio, 1980.
- [16] R.S. Varga and A.J. Carpenter, *On the Bernstein Conjecture in approximation theory*, Constr. Approx. **1** (1985), 333–348. Also appeared (in Russian) in Mat. Sbornik **129** (171) (1986), 535–548.
- [17] R.S. Varga, A. Ruttan, and A.J. Carpenter, *Numerical results on best uniform rational approximations to $|x|$ on $[-1, +1]$* , Mat. Sbornik **182** (No. 11) (1991), 1523–1541.
- [18] N.S. Vjacheslavov, *On the least deviations of the function $\operatorname{sign} x$ and its primitives from the rational functions in the L_p -metrics, $0 < p \leq \infty$* (in Russian), Mat. Sbornik **103** (145) (1977), 24–36. English translation in Math. USSR Sbornik **32** (1977), 19–31.
- [19] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1962.
- [20] S.N. Bernstein, *Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynômes de degrés très élevés*, Bull. Acad. Sci. USSR, Cl. sci. math. nat. **2** (1938), 181–190.
- [21] S.N. Bernstein, *Collected Works* (Russian), Akad. Nauk SSSR, Moscow, Vol. II, 1954, 262–272.
- [22] A.J. Carpenter and R.S. Varga, *Some numerical results on best uniform polynomial approximation of x^α on $[0, 1]$* , USSR–US Conference on Approximation Theory 1991, to appear.
- [23] H. Stahl, *Best uniform rational approximation of $|x|$ on $[-1, +1]$* , Mat. Sbornik, to appear.
- [24] R.S. Varga and A.J. Carpenter, *On best uniform rational approximation of x^α on $[0, 1]$* , Numerical Algorithms, to appear.

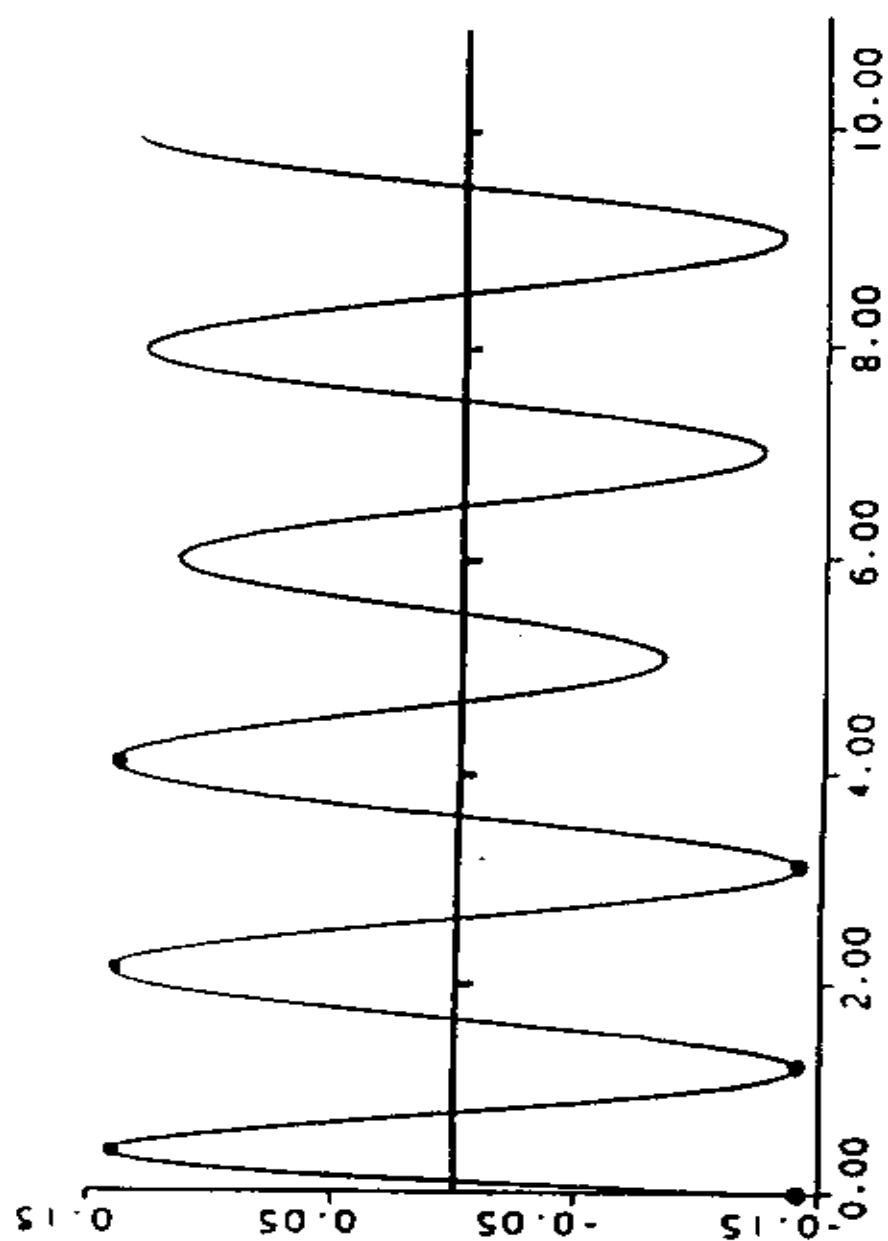


图 1.1 $R_5(t)$

第二章 “1/9” 猜测及其新结果

2.1 “1/9” 猜测的起源

在此我们简要叙述有关“1/9”猜测的研究及其由 Gonchar 和 Rakhmanov^[6] 给出的最新精确解. 正如我们将要看到的, 与“1/9”猜测有关的数学研究已涉及到偏微分方程数值解, 矩阵论, 有理逼近论, 科学计算和复势论等诸多数学领域, 这是十分令人兴奋的.

为了简单起见, 首先考虑如下二阶线性抛物型偏微分方程数值逼近问题:

对于 $t > 0$ 及在 Ω 之内的 \mathbf{x} ,

$$\begin{aligned} \phi u_t(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n (K_i(\mathbf{x}) u_{x_i}(\mathbf{x}, t))_{x_i} \\ - \sigma(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}, t) + S(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

(其中假定 Ω 为一个开的、连通的, R^n 的有界子集), 在 $\partial\Omega$ (Ω 的边界) 上的边界条件为

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \partial\Omega; t > 0), \quad (1.2)$$

初始条件为

$$u(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Omega), \quad (1.3)$$

这里 $S(\mathbf{x})$ 和 $h(\mathbf{x})$ 是给定的, 定义在 $\bar{\Omega}$ (Ω 的闭包) 上充分光滑的函数, $g(\mathbf{x})$ 是定义在 $\partial\Omega$ 上给定的充分光滑的函数. 此外, ϕ 是给定的正的常数, 而且假定给出的量 $K_i(\mathbf{x})$ 和 $\sigma(\mathbf{x})$ 在 $\bar{\Omega}$ 上都是正的. 很多重要的物理和工程问题都满足这些假设. 例如, 在反应堆物理中, 反应堆中的指定平均能量的中子群随时间变化的密度满足 (1.1) (在扩散理论近似的意义下), 这时物理意义下 $1/\phi$ 代表这种中子的平均速度, $K_i(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x})$ 和 $\sigma(\mathbf{x})$ 分别代表反应堆中每个点的扩散系数和总截面. 类似的应用可以延伸到石油工业中, 如解决在均匀多孔介质中可压缩流体的流动问题.

利用在 R^n 中的离散网格和适当的 $(2n+1)$ 点差分格式逼近空间导数, 就得出 (1.1)–(1.3) 的半离散逼近 (即空间离散但时间是连续的) (见

Varga [24, p.253]).

$$\begin{cases} \frac{dW(t)}{dt} = -AW(t) + r & (t > 0), \\ W(0) = \tilde{W}, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中 A 为一个稀疏实对称正定的 $N \times N$ 矩阵. 显然 (1.4) 的解可以表示为:

$$W(t) = A^{-1}r + \exp(-tA)\{\tilde{W} - A^{-1}r\} \quad (t \geq 0) \quad (1.5)$$

和常规一样, 这里 $\exp(-tA) := \sum_{k=0}^{\infty} (-tA)^k/k!$.

众所周知 (见 [24, §8.3]), 一般用对 $\exp(-tA)$ 的 Páde 有理逼近去近似求解 (1.5), 这样在具体情况下就得到对于这类抛物型问题的向前差分, 向后差分 and Crank-Nicholson 方法. 在下节中我们的兴趣将在于 $\exp(-tA)$ 的 Chebyshev 有理逼近, 而不是 Páde 逼近. 这是由于 e^{-x} 的 Páde 有理逼近是作为在 $x=0$ 处 e^{-x} 的局部逼近, 一般当 x 比较大时逼近效果不好. 这就造成对时间步长加上了限制 (由于稳定性和/或精确度的原因). 与之相反, e^{-x} 的 Chebyshev 有理逼近是对区间 $[0, +\infty)$ 整体定义的. 正如我们将看到的, 这种逼近不产生对时间步长的限制.

2.2 Chebyshev 半离散逼近

为了确定 (1.5) 的 Chebyshev 半离散逼近, 我们考虑下面逼近论中的问题. 如果 π_m 代表次数最多为 m 的全体实多项式, $\pi_{m,n}$ 代表全体实有理函数 $r_{m,n}(x) = P(x)/q(x)$ 而 $p \in \pi_m$ 和 $q \in \pi_n$. 并设

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \lambda_{m,n}(e^{-x}) : \\ &= \inf\{\|e^{-x} - r_{m,n}(x)\|_{L_{\infty}[0,+\infty)} : Y_{m,n} \in \pi_{m,n}\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

(2.1) 中的常数被称为在 $[0, +\infty)$ 上 e^{-x} 的一致有理 Chebyshev 常数. 显然当且仅当 $0 \leq m \leq n$ 时, $\lambda_{m,n}$ 是有限的. 此外, 给定任何一对非负整数 (m, n) 满足 $0 \leq m \leq n$, 众所周知 (见 Achieser [1, p.55]) 在除去一个可能的公因子外, 在 $\pi_{m,n}$ 中存在唯一的 $\hat{r}_{m,n}$ 满足

$$\hat{r}_{m,n} = \hat{p}_{m,n}(x)/\hat{q}_{m,n}(x) \quad (\hat{p}_{m,n} \in \pi_m, \hat{q}_{m,n} \in \pi_n), \quad (2.2)$$

且在 $[0, +\infty)$ 上 $\hat{q}_{m,n}(x) > 0$, 使得

$$\lambda_{m,n} = \|e^{-x} - \hat{r}_{m,n}(x)\|_{L_\infty[0, +\infty)}. \quad (2.3)$$

如果 $\hat{q}_{m,n}(x) := \sum_{j=0}^n e_j x^j$, 我们令 $\hat{q}_{m,n}(tA) := \sum_{j=0}^n c_j (tA)^j$ 这是一个

$N \times N$ 矩阵的 n 次实多项式. 此外, 由于在 $[0, +\infty)$ 上 $\hat{q}_{m,n}(x) > 0$ 和 A 是实对称正定矩阵. 我们可以看出对于任何 $t > 0$ 矩阵 $\hat{q}_{m,n}(tA)$ 也是实对称正定的 (因此是非奇异的) 对照 (1.5), 我们定义 (和我们原来在 [23] 中做的一样) (1.5) 解 $W(t)$ 的第 (m, n) 个 Chebyshev 半离散逼近 $W_{m,n}(t)$ 为

$$W_{m,n}(t) := A^{-1}r + (\hat{q}_{m,n}(tA))^{-1}(\hat{p}_{m,n}(tA)) \cdot \{\widetilde{W} - A^{-1}r\} \quad (t \geq 0) \quad (2.4)$$

或等价于

$$\hat{q}_{m,n}(tA)W_{m,n}(t) = \hat{q}_{m,n}(tA)A^{-1}r + \hat{p}_{m,n}(tA) \cdot \{\widetilde{W} - A^{-1}r\} \quad (t \geq 0). \quad (2.4')$$

把 $\hat{q}_{m,n}(x)$ 分解为 x 的实线性和二次因式, 并要求这些因式在 $[0, +\infty)$ 必须是正的, 则解 (2.4') 中的 $W_{m,n}(t)$ 可以归结为递推地求解一系列矩阵问题. 对于每个 $t > 0$, 解每个矩阵问题都要用高斯消去法或其它算法直接求一个 tA 的线性或二次多项式给出的对称正定矩阵的逆 (详细地见 Varga [25, P. 71]).

(2.4) 中的 $W_{m,n}(t)$ 逼近 (1.5) $W(t)$ 的好坏如何呢? 考虑 N 一维变向量空间 \mathcal{C}^N 中的 l_2 向量范数, 大家都知道, 如果 B 是一个 $N \times N$ 的 Hermitian 矩阵, 它的 (实) 特征值为 $\{\mu_j\}_{j=1}^N$, 那么由 B 导出算子的范数简单地表示为

$$\|B\|_2 = \max_{1 \leq j \leq N} \{|\mu_j|\},$$

进而有, 如果 $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ 代表 (1.5) 中 $N \times N$ 的实对称正定矩阵 A 的 (正) 特征值, 那么

$$\|\exp(-tA) - \hat{r}_{m,n}(tA)\|_2 = \max_{1 \leq j \leq N} |e^{-t\alpha_j} - \hat{r}_{m,n}(t\alpha_j)|.$$

但因为对所有的 $1 \leq j \leq N$ 和 $t \geq 0$, $t\alpha_j \geq 0$ 成立, 所以从 (2.3) 可以得到

$$\|\exp(-tA) - \hat{r}_{m,n}(tA)\|_2 \leq \lambda_{m,n} \quad (t \geq 0).$$

然后, 从 (1.5) 和 (2.4) 我们有

$$\|W(t) - W_{m,n}(t)\|_2 \leq \lambda_{m,n} \|\widetilde{W} - A^{-1}r\|_2 \quad (t \geq 0). \quad (2.5)$$

注意到因为 (2.5) 的右端和 t 无关, 所以我们得到了一个对于所有的 $t \geq 0$ 时 $W(t) - W_{m,n}(t)$ 的误差界. 由于精度和 / 或稳定性的原因我们熟悉的 Páde 逼近限制时间步长, 与此相反, Chebyshev 半离散化方法允许用相当大的时间步长. 事实上, 对于固定的整数对 (m, n) , $0 \leq m \leq n$, 我们可以把 Chebyshev 半离散化方法 (2.4) 看作为一种单一正时间步长的时间阶梯化的方法. (稍微改动一下宇航员 Neil Armstrong 说过的一句话就成为 Páde 前进一小步, Chebyshev 就向前迈一大截).

然而, 我们确实注意到了, Chebyshev 半离散方法仅限于 (1.1) 那样的系数与时间无关的线性问题. 对于不是这种形式的物理问题, 还必须对 $\exp(-\Delta t A)$ 用 Páde 逼近. 要了解近年来 Páde 逼近用于初值问题的情况, 请见 Reusch 等人的文章 [14].

2.3 “1/9” 猜测

从 (2.5) 式可以看出, Chebyshev 半离散逼近的效果和当 $n \rightarrow \infty$ 时 (2.1) 式中的 Chebyshev 常数 $\lambda_{m,n}$ 的性质有很大的关系. 从 (2.1) 式显然得出

$$0 < \lambda_{n,n} \leq \lambda_{n-1,n} \leq \cdots \leq \lambda_{0,n} \quad (n = 0, 1, \cdots). \quad (3.1)$$

经过初等的讨论, Cody, Meinardus 和 Varga 在 [5] 中证明了如果 $S_n(x) := \sum_{j=0}^n x^j/j!$ 代表熟知的 e^x 的第 n 项部分和, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left\| e^{-x} - \frac{1}{S_n(x)} \right\|_{L_\infty[0, +\infty)} \right\}^{1/n} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

因为 $1/S_n(x)$ 是 $\pi_{0,n}$ 中的一个元素, 考虑 (2.1) 中 $\lambda_{0,n}$ 的定义, 则 (3.2) 式直接包含着

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_{0,n}^{1/n} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

因此, 如果 $\{m(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 是任一个非负整数序列, 且 $0 \leq m(n) \leq n$, 从 (3.3) 式和不等式 (3.1) 我们得出

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{m(n),n})^{1/n} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

借助于一种平移原理可以把 (3.4) 中的 $1/2$ 稍许改进一些. 把它写成为如下结果.

定理 1 ([5]) 令 $\{m(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 是任一非负整数序列, 且对每个 $n \geq 0$ 都有 $0 \leq m(n) \leq n$. 那么,

$$\frac{1}{6} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{m(n),n})^{1/n} \leq \frac{1}{2.29878}. \quad (3.5)$$

(3.5) 的结果显然指出了在 $[0, +\infty)$ 上 e^x 的 Chebyshev 常数 $\lambda_{m,n}$ 几何收敛到零. 从 (3.1) 式, 看出序列 $\{\lambda_{n,n}\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛到零一定最快, Cody, Meinardus 和 Varga 在 1969 年 [5] (用 Remez 算法) 计算出 $\{\lambda_{n,n}\}_{n=0}^{14}$ 的第一批估计值, 表 2.1 给出了这些数值.

表 2.1

n	$\lambda_{n,n}$	$1/\lambda_{n,n}^{1/n}$	n	$\lambda_{n,n}$	$1/\lambda_{n,n}^{1/n}$
0	5.000 (-1)	—	8	1.172 (-8)	9.804
1	6.685 (-2)	14.96	9	1.263 (-9)	9.744
2	7.359 (-3)	11.66	10	1.361 (-10)	9.696
3	7.994 (-4)	10.77	11	1.466 (-11)	9.658
4	8.653 (-5)	10.37	12	1.579 (-12)	9.626
5	9.346 (-6)	10.14	13	1.701 (-13)	9.600
6	1.008 (-6)	9.987	14	1.832 (-14)	9.577
7	1.087 (-7)	9.882			

$\lambda_{n,n}$ 收敛到零的几何收敛速度看来要比 (3.5) 式中上界的估计值好的多. 其后, Schönhage [18] 在 1973 年证明了

$$\frac{1}{6\sqrt{(4n+4)\log 3 + 2\log 2}} \leq 3^n \lambda_{0,n} \leq \sqrt{2} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

表 2.3 $\{\lambda_{n-1,n-1}/\lambda_{n,n}\}_{n=1}^{30}$

n	$\lambda_{n-1,n-1}/\lambda_{n,n}$
1	7.4815532397221509829356536616817047817627984227696(+00)
2	9.0819455991000169708588696090116053013062015321681(+00)
3	9.2054646248528427537813883233351970910096341895810(+00)
4	9.2390013695637342229492228910895668594203903511860(+00)
5	9.2579780201008948071386386966176824253418736773867(+00)
6	9.2673633886078728002406169193047563695298406988185(+00)
7	9.2731650684028757880126091410302398681948193463184(+00)
8	9.2768895688704833336324198589706052242724880476172(+00)
9	9.2794442071765347804120940269531440575883814379160(+00)
10	9.2812683495309755120464682831533111454037182839070(+00)
11	9.2826170054814049413318434721810547537510453765262(+00)
12	9.2836420758101343365763572286526847004054823670187(+00)
13	9.2844394306651793615709775312796518943731046644594(+00)
14	9.2850718606898552364565090058954105627072638256542(+00)
15	9.2855819149043751995853520164465592457350862957931(+00)
16	9.2859992519340952301903430112062879793060351437360(+00)
17	9.2863450591648612312069660869905305380460379908323(+00)
18	9.2866347991400778934888938646138283512490395348046(+00)
19	9.2868799705918004397301050888494834728534387767879(+00)
20	9.2870892682832631479754585814309629455011369059197(+00)
21	9.2872693653333554026168814849193491692724731187991(+00)
22	9.2874254522088778823625744929007529809804239100012(+00)
23	9.2875616152014957847981034264879772236314002103896(+00)
24	9.2876811067903443960632445539185855003199200785395(+00)
25	9.2877865418013514399321174449489929772550616085232(+00)
26	9.2878800417598657237157599122881662160311796009207(+00)
27	9.2879633425048853224353278979631458037287458900494(+00)
28	9.2880378753756707950994314690770008799076337263447(+00)
29	9.2881048291364217038868850048114151489211447279412(+00)
30	9.2881651976905816378400677087169532012794506558118(+00)

于是事实上有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{0,n}^{1/n} = 1/3. \quad (3.6)$$

又因为, 在决定 $\lambda_{n,n}$ 的 $\hat{r}_{n,n}(x)$ 中系数的个数大体上是确定 $\lambda_{0,n}$ 的 $\hat{r}_{0,n}(x)$ 中系数个数的两倍, 把 Schönage 的结果和表 2.1 中的数结合起来考虑, 在 1977 年就提出了一个 (不强的) 猜测:

$$\text{猜测: (Saff 和 Varga [17]) } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,n}^{1/n} = \frac{1}{9}. \quad (3.7)$$

表 2.4

第一次 Richardson 外插
9.2890264097244993503380805433426294011879483664028(+00)
9.2890262501648177327777051096402664917526634197715(+00)
9.2890261238332083354380146232927890779219008634554(+00)
9.2890260227584489781751521371269212102821968923977(+00)
9.2890259411144138331662151027758237265334600018012(+00)
9.2890258745847956720447117179152892402483118606939(+00)
9.2890258199319277513867988095911873373807234645966(+00)
9.2890257746993546055018224389315527078059834110588(+00)
9.2890257370035920984371231103514289542999627148124(+00)
9.2890257053863190014778076067603006933698792208821(+00)

表 2.5

第二次 Richardson 外插
9.2890254903568100301092506634385383515846398643843(+00)
9.2890254907395748783152475269378170381563748710076(+00)
9.2890254910173236638792234055586598196559281750941(+00)
9.2890254912217618361898849864036303004596910942434(+00)
9.2890254913741950639848522211186105992458585679159(+00)
9.2890254914892118820483798893742287864937739688197(+00)
9.2890254915769523219995629336916174338011290018776(+00)
9.2890254916445664944177855162897305944259530044229(+00)
9.2890254916971628978907097204202614126010390550083(+00)

在 1984 年 Carpenter, Ruttan 和 Varga^[4] 对表 2.1 中 1969 年算出的估计值 $\{\lambda_{n,n}\}_{n=0}^{14}$ 进行了数值上的改进. 他们利用了 Richard Brent 的 MP(高精度) 软件包中的 230 位有效数字运算, 并和第一章中

一样, 利用 (第二类)Remez 算法, 算出 Chebyshev 常数 $\{\lambda_{n,n}\}_{n=0}^{30}$ 直到大约 200 位有效数字. 这些数字截断到 50 位有效数字后如表 2.2 所示.

表 2.6

第三次 Richardson 外插
9.2890254919264426246904315998037974616346229535605(+00)
9.2890254919246363633882112757200795725544689684432(+00)
9.2890254919235212361782552355452310998144517528836(+00)
9.2890254919227472919000744467255805180069646466419(+00)
9.2890254919222163735816605228071443149565143016341(+00)
9.2890254919218439884743390512914155757325560186146(+00)
9.2890254919215797099009277334795760282585652815175(+00)
9.2890254919213896705910708011872612164000901127673(+00)

表 2.7

第四次 Richardson 外插
9.2890254919205312240649832664389025519177553659037(+00)
9.2890254919208485671587410305609475319973452742869(+00)
9.2890254919207963073654937082427113430339242329911(+00)
9.2890254919208120946294556940428805578880731390886(+00)
9.2890254919208127681771411301709359901892869271757(+00)
9.2890254919208150149547144296258736339472494913060(+00)
9.2890254919208161591023954162336683020414775499319(+00)

表 2.8

第五次 Richardson 外插
9.2890254919214127326587548334445830521388384447460(+00)
9.2890254919206982368598678821050851331068234703891(+00)
9.2890254919208432825305071272154597415183101617465(+00)
9.2890254919208141654584179760993333379827853346193(+00)
9.2890254919208198985165341295732097954739907627740(+00)
9.2890254919208187594380340221604743658919958649908(+00)

从这些数字 [4] 中还算出了比值 $\{\lambda_{n-1,n-1}/\lambda_{n,n}\}_{n=1}^{30}$, 在表 2.3 中列出了计算结果.

对表 2.3 中最后十一个数使用 Richardson 外插 (取 $x_n = 1/n^2$), 这完全和在第一章计算 Bernstein 常数 β 时一样. 在表 2.4—2.9 中给出这些外插值

表 2.9

第六次 Richardson 外插
9.2890254919196627357020607062507403229154974205964(+00)
9.2890254919210653837136734712907208606483991578876(+00)
9.2890254919207671899154474789653160736121386135206(+00)
9.2890254919208296189900708128670580198741435560234(+00)
9.2890254919208167344095893867600558244128938244875(+00)

从表 2.7 中最好的外插结果来看, 到 15 位有效数字的数值结果为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,n}^{1/n} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9.28902549192081}. \quad (3.8)$$

利用另一个不同的计算方法, 即 Carathéodory-Fejer 方法, Tefethen 和 Gutknecht^[22] 从数值上估计了 (3.8) 中的值, 其结果如下. 令

$$\exp[(x-1)/(x+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} {}'C_k T_k(x) \quad (x \in [-1, +1]) \quad (3.9)$$

代表 $\exp[(x-1)/(x+1)]$ 在 $[-1, +1]$ 上的 Chebyshev 展开, 其中

$$C_k := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \exp[(x-1)/(x+1)] T_k(x) dx / \sqrt{1-x^2} \quad (k=0, 1, \dots), \quad (3.10)$$

而在 (3.9) 式中求和号上的 ' 代表在 C_0 的地方用 $C_0/2$. 用 C_k 构成无穷阶 Hankel 矩阵 $H: [C_{i+j-1}]_{i,j=1}^{\infty}$, 并令

$\sigma_n =$ Hankel 矩阵 H 的第 n 个奇异值 ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$).

在 [22] 中猜测

$$\lambda_{n,n} \stackrel{?}{\sim} \sigma_n \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

并根据 σ_n 的数值估计, Trefethen 和 Gutknecht^[22] 猜测

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,n}^{1/n} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9.28903}. \quad (3.11)$$

用完全不同的数值方法, 对 (3.8) 和 (3.11) 进行数值估计其结果却是相近的. 这就给出了猜测 (3.7) 不成立的明显证据.

已有不少和 “1/9” 猜测有关的研究者. 截止到 1982 年这些研究成果都综述在 Varga 的专著 [26] 中. 这些研究工作沿着不同的方向在进行, 第一个就是寻找 Λ_1 的下界估计值和 Λ_2 的上界估计值, 其中 (见 (2.1))

$$\Lambda_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,n}^{1/n}(e^{-x}) \text{ 和 } \Lambda_2 := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,n}^{1/n}(e^{-x}), \quad (3.12)$$

这都是为了估计在 $[0, +\infty)$ 上对特定函数 e^{-x} 作有理逼近时的几何收敛速率. 1982 年 Schönhage^[19] 确定了 (3.12) 式中 Λ_1 的最好下界, 他证明了

$$\frac{1}{13.928} < \Lambda_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,n}^{1/n}(e^{-x}). \quad (3.13)$$

在 1985 年 Opitz 和 Scherer^[12] 确定了 (3.9) 式中 Λ_2 的最佳上界, 他证明了

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,n}^{1/n}(e^{-x}) =: \Lambda_2 < \frac{1}{9.037}. \quad (3.14)$$

这个结果当然证明了 (3.7) 式中的 “1/9” 猜测不成立! 其实 (3.14) 证明了常数 $\{\lambda_{n,n}(e^{-x})\}_{n=0}^{\infty}$ 几何收敛到零的度比 1/9 要好!

在另一个方向上, 自然要问是否有定义在 $[0, +\infty)$ 上不同于 e^x 的连续函数 $f(x) (\neq 0)$, 对于这个函数 $1/f(x)$ 的 Chebyshev 常数, 即 (见 (2.1))

$$\lambda_{m,n}(1/f) := \inf\{\|1/f(x) - r_{m,n}(x)\|_{L_{\infty}[0,\infty)} : r_{m,n} \in \pi_{m,n}\}. \quad (3.15)$$

具有收敛到零的几何收敛性. 也就是, 存在一个非负整数序列 $\{m(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 且对所有 $n > 0$ $0 \leq m(n) \leq n$. 使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{m(n),n}(1/f))^{1/n} < 1. \quad (3.16)$$

为了叙述这个方面的结果, 我们需要下列记号. 给定 $r > 0$ 和 $s > 1$, 令 $\varepsilon(r, s)$ 代表复平面上由下式定义的闭椭圆:

$$\varepsilon(r, s) := \left\{ z = x + iy : \frac{(x - \frac{r}{2})^2}{[\frac{r}{4}(s + \frac{1}{s})]^2} + \frac{y^2}{[\frac{r}{4}(s - \frac{1}{s})]^2} \leq 1 \right\}, \quad (3.17)$$

且如果 $g(z)$ 是定义在 $\varepsilon(r, s)$ 上的一个函数, 那么设

$$\widetilde{M}_g(r, s) := \sup\{|g(z)| : z \in \varepsilon(r, s)\}. \quad (3.18)$$

用这些符号, 我们叙述一个结果如下:

定理 2 (Meinardus 等人 [9]) 令 $f(x)$ 是在 $[0, +\infty)$ 上一个实连续函数, 并假设存在一个实多项式序列 $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$, 对于每个 $n \geq 0$ 都有 $p_n \in \pi_n$, 还有一个实数 $q > 1$, 使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\|1/p_n - 1/f\|_{L_\infty[0, +\infty)}\}^{1/n} \leq \frac{1}{q} < 1. \quad (3.19)$$

那么, $f(x)$ 可以被延拓为一个整函数 $F(z)$, 对于所有的 $x > 0$, 都有 $F(x) = f(x)$, 并且 $F(z)$ 有有限阶 P , 也就是说, 如果 $M_F(r) := \max_{|z|=r} |F(z)|$, 那么

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_F(r)}{\log r} = \rho \quad \text{其中} \quad 0 \leq \rho < \infty. \quad (3.20)$$

还有, 对于每个 $S > 1$, 存在常数 K, θ 和 r_0 (都依赖于 S 和 q) 使得 (见 (3.18))

$$\widetilde{M}_F(r, s) \leq K(\|f\|_{L_\infty[0, r]})^\theta \quad (\text{对所有 } r > r_0). \quad (3.21)$$

反过来, 令 $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ 是个实整函数且 $a_0 > 0$ 并对所有的 $k \geq 1$, $a_k \geq 0$. 如果存在实数 $A > 0, s > 1, \theta > 0$ 和 $r_0 > 0$ 使得 (见 (3.18) 和 (3.21))

$$\widetilde{M}_f(r, s) \leq A(\|f\|_{L_\infty[0, r]})^\theta \quad (\text{对所有 } r \geq r_0), \quad (3.22)$$

那么存在一个实多项式序列 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 而对每个 $n \geq 0$ $p_n \in \pi_n$ 和一个实数 $q \geq S^{1/(1+\theta)} > 1$, 使得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\|1/p_n - 1/f\|_{L_{\infty}[0, \infty)}\}^{1/n} = \frac{1}{q} < 1. \quad (3.23)$$

如果对于所有的 $n \geq 0$ 在 (3.15) 式中选择 $m(n) = 0$, 那么

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{0,n}(1/f))^{1/n} \leq \frac{1}{q} < 1. \quad (3.24)$$

有趣的是, 在 (3.21) 和 (3.22) 中的椭圆上的增长速度成为定理 2 中几何收敛性的必要条件和充分条件, 正如将要看到的, 在定理 2 的必要和充分条件之间有一个小裂缝, 这是一个尚未解决的问题.

迄今研究人员在这个领域中从事的另一个研究方向是解决趋向于零的几何收敛性问题. 即和 (3.2) 一样, 求 e^{-x} 的一致有理 Chebyshev 逼近常数. 但不在 $[0, +\infty)$ 上研究这个问题, 而是在复平面上的对称于射线 $[0, +\infty)$ 的某个扇形区内研究它. 为了叙述这类结果, 对于任何一个非负整数对 (ν, n) 相应 e^{-x} (在 $\pi_{\nu, n}$) 中的第 (ν, n) 个 Padé 有理逼近 $R_{\nu, n}(x)$ 可以显式地表示为: (见 Perron [13, p. 433])

$$R_{\nu, n}(x) = Q_{\nu, n}(x)/P_{\nu, n}(x), \quad (3.25)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{\nu, n}(x) &:= \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(n+\nu-j)! \nu! (-x)^j}{(n+\nu)! j! (\nu-j)!}, \\ P_{\nu, n}(x) &:= \sum_{j=0}^n \frac{(n+\nu-j)! n! x^j}{(n+\nu)! j! (n-j)!}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

进而, 对任何实数 $0 \leq \theta < \pi$ 对称扇形区 $S(\theta)$ 定义为

$$S(\theta) := \{z \in \mathcal{C} : |\arg z| \leq \theta\}. \quad (3.27)$$

此外, 对每个定义在 $S(\theta)$ 上的函数 $h(z)$, 我们设

$$\|h\|_{L_{\infty}(S(\theta))} := \sup\{|h(z)| : z \in S(\theta)\}. \quad (3.28)$$

用这些记号, 我们有如下结果:

定理 3 (Saff, Varga 和 Ni [15]). 假定在 (3.25)—(3.26) 中给定的 Páde 逼近序列 $\{R_{\nu(n),n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n} = \sigma, \quad \text{其中 } 0 < \sigma < 1, \quad (3.29)$$

并设

$$\begin{aligned} \theta_0 &:= \cos^{-1} \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma} \right), \\ g(\sigma) &:= \sigma^\sigma (1-\sigma)^{1-\sigma} / 2^{1-\sigma}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

对于任何满足

$$0 < \theta < 4 \tan^{-1} \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{g(\sigma)}}{1+\sqrt{g(\sigma)}} \right) \tan \left(\frac{\theta_0}{4} \right) \right\} \quad (3.31)$$

的 θ 值, 则有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \|e^{-z} - R_{\nu(n),n}(z)\|_{L_\infty(S(\theta))} \}^{1/n} \leq g(\sigma) \left\{ \frac{\sin[1/4(\theta_0 + \theta)]}{\sin[1/4(\theta_0 - \theta)]} \right\} < 1. \quad (3.32)$$

对于 e^{-z} 在扇区 $S(\theta)$ 中非 Páde 型有理逼近类似的几何收敛性由 Saff, Schönhage 和 Varga 在 [16] 中给出.

2.4 Gonchar 和 Rakhmanov 的结果

在一个非常漂亮和全新的研究工作中, Gonchar 和 Rakhmanov^[6] 利用复平面上的势理论, 给出了关于“1/9”猜测的精确解. 遗憾的是不能用几页的篇幅对这个方法进行恰当的介绍. 基于在紧致 Riemann 面上 Abelian 积分理论, Nuttall 在 [11] 中给出的关于局部有理逼近的结果以及关于多点 Páde 逼近渐近性态. Stahl 在 [20] 中给出的结果在这些理论的发展中都起了重要作用. 关于这些结果的综述可以看 Stahl 的著作 [21].

Gonchar 和 Rakhmanov^[6] 结果的一个特殊情况是

定理 4 (Gonchar 和 Rakhmanov [6]) 用在 (2.1) 中定义的 $\lambda_{n,n}(e^{-x})$. 有一正数 Λ , 且 $0 < \Lambda < 1$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n,n}(e^{-x}))^{1/n} = \Lambda. \quad (4.1)$$

这个结果当然确定了 (3.12) 中的 \wedge_1 和 \wedge_2 是相等的. 但是数值上 \wedge 这个数是什么以及如何才能描述它是很迷人的问题!

在 1986 年 Magnus 在 [8] 中较早地确定 (没有完全证明)

$$\wedge = \exp(-\pi K'/K) = \frac{1}{9.289025491920818918755449435951 \dots}, \quad (4.2)$$

其中 K 和 K' 是模为 k 和 $k' = \sqrt{1-k^2}$ 的第一类完全椭圆积分在 $K = 2E$ 点算出的值. E 是第二类完全椭圆积分. 另一方面, Gonchar 于 1986 年 8 月在 Berkeley 的国际数学家大会上宣读了下述结果

定理 5 (Gonchar 和 Rakhmanov [6]) (4.1) 中的数 \wedge 可用数论的方法表征如下: 定义

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j, \quad (4.3)$$

其中

$$a_j := \left| \sum_{d|j} (-1)^d d \right| \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (4.4)$$

于是 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内是解析的, 则 \wedge 是方程

$$f(\wedge) = \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.5)$$

的唯一正根.

利用牛顿法 Carpenter^[3] 已经高精度地计算出 (4.5) 式中的 \wedge , 有 101 位有效数字的 $1/\wedge$ 如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\wedge} = & 9.2890254919208189187554494359517450610316 \\ & 9486775012440823970061421729375247286507 \\ & 07052415870614247144 \dots, \end{aligned} \quad (4.6)$$

这个结果验证了 (3.8) 和 (3.11) 在数值上的近似性.

真正有趣的是, 在 1986 年后半年, Magnus 写信告诉 Gonchar, (4.1) 中的 \wedge 也是下面方程 (小于 1 的) 唯一正根

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 (-\wedge)^{n(n+1)/2} = 0, \quad (4.7)$$

它等价于 (4.5). 此外, 整整 100 年前的 1886 年 Halphen^[7] 已从 (4.7) 式算出了 Λ 到 6 位有效数字的值! (Halphen 在研究 ζ 函数变化时得到了 (4.7) 中的方程). 因此称 “1/9” 常数为 Halphen 常数是合适和恰当的!

最后, 和定理 2 及定理 3 的结果联系考虑, 在 [6] (p.329) 中还提到 Gonchar 和 Rakhmanov 的定理 [6] 作为主要结果可它以准确地确定: i) 在 $[0, +\infty)$ 上 $e^{-p(x)}$ 最佳一致有理逼近的阶, 其中 $p(x)$ 是任一个最高次项系数为正的实多项式. ii) 在 (3.27) 扇形区 $S(\theta) := \left\{ z : |\arg z| \leq \theta, \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$ 上 e^{-z} 的最佳一致有理逼近的阶. 在后一种情况下, 结果是

定理 6^[6] 对于每个 $n = 0, 1, 2, \dots$ 和 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 设

$$\lambda_{n,n}(e^{-z}, S(\theta)) := \inf \{ \|e^{-z} - r_{n,n}(x)\|_{L_\infty(S(\theta))} : r_{n,n} \in \pi_{n,n} \}.$$

则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n,n}(e^{-z}, S(\theta)))^{1/n} = v(\theta) \in [0, 1]$$

存在.

在 [6] 中借助于和 ζ 函数有关的积分, 显式地给出了 (4.9) 式中 $v(\theta)$ 的值, 特别有

$$v(\pi/4) \doteq 1/4.42.$$

参考文献

- [1] N. I. Achieser, *Theory of Approximation*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1956.
- [2] Richard P. Brent, *A FORTRAN multiple-precision arithmetic package*, Assoc. Comput. Mach. Trans. Math. Software 4 (1978), 57-70.
- [3] A. J. Carpenter, *Some theoretical and computational aspects of approximation theory*, Ph. D. thesis, The University of Leeds, Leeds, England, 1988.
- [4] A. J. Carpenter, A. Ruttan, and R.S. Varga, *Extended numerical computations on the “1/9” Conjecture in rational approximation*

- theory, Rational Approximation and Interpolation (P.R. Graves-Morris, E.B. Saff, and R.S. Varga, eds.), Lecture Notes in Mathematics 1105, Springer-Verlag, Heidelberg, 1984, pp. 383–411.
- [5] W. J. Cody, G. Meinardus, and R. S. Varga, *Chebyshev rational approximation to e^{-x} on $[0, +\infty)$ and applications to heat-conduction problems*, J. Approx. Theory **2** (1969), 50–65.
 - [6] A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, *Equilibrium distribution and the degree of rational approximation of analytic functions* (in Russian), Mat. Sbornik **134** (176) (1987), 306–352. Also, Math. USSR Sbornik **62** (1989), 305–348 (in English).
 - [7] G. H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1886.
 - [8] A. P. Magnus, *CFGT determination of Varga's constant "1/9"*, Preprint B-1348, Inst. Math. Katholieke Univ. Leuven, Louvain, 1986.
 - [9] G. Meinardus, A. R. Reddy, G. D. Taylor, and R. S. Varga, *Converse theorems and extensions in Chebyshev rational approximation to certain entire functions in $[0, +\infty)$* , Trans. Amer. Math. Soc. **170** (1972), 171–186.
 - [10] G. Meinardus and R. S. Varga, *Chebyshev rational approximations to certain entire functions in $[0, +\infty)$* , J. Approx. Theory **3** (1970), 300–309.
 - [11] J. Nuttall, *Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials*, J. Approx. Theory **42** (1984), 299–386.
 - [12] H. -U. Opitz and K. Scherer, *On the rational approximation of e^{-x} on $[0, \infty)$* , Constr. Approx. **1** (1985), 195–216.
 - [13] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner, Leipzig, 1929.
 - [14] M. F. Reusch, L. Ratzan, N. Pomphrey, and W. Park, *Diagonal Padé approximations for initial value problems*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **9** (1988), 829–838.
 - [15] E. B. Saff, R. S. Varga, and W. -C. Ni, *Geometric convergence of rational approximations to e^{-x} in infinite sectors*, Numer. Math. **26** (1976), 211–225.
 - [16] E. B. Saff, A. Schönhage, and R. S. Varga, *Geometric convergence to e^{-x} by rational functions with real poles*, Numer. Math. **25** (1976), 307–322.

- [17] E. B. Saff and R. S. Varga, *Some open questions concerning polynomials and rational functions*, Padé and Rational Approximation (E. B. Saff and R. S. Varga, eds.), Academic Press, Inc., New York, 1977, pp. 483–488.
- [18] A. Schönhage, *Zur rationalen Approximierbarkeit von e^{-x} über $[0, \infty)$* , J. Approx. Theory **7** (1973), 395–398.
- [19] A. Schönhage, *Rational approximations to e^{-x} and related L^2 -problems*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 1067–1082.
- [20] H. Stahl, *Orthogonal polynomials with complex-valued weight function*. I, II, Constr. Approx. **2** (1986), 225–240, 241–251.
- [21] H. Stahl, *General convergence results for rational approximants*, Approximation VI, volume II (C. K. Chui, L. L. Schumaker, and J. D. Ward, eds.), Academic Press, Inc., Boston, 1989, pp. 605–634.
- [22] L. N. Trefethen and M. H. Gutknecht, *The Carathéodory-Fejér method for real rational approximation*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983), 420–436.
- [23] R. S. Varga, *On higher order stable implicit methods for solving parabolic partial differential equations*, J. Math. and Phys. **XL** (1961), 220–231.
- [24] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [25] R. S. Varga, *Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Math. **3**, Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, 1971.
- [26] R. S. Varga, *Topics in Polynomial and Rational Interpolation and Approximation*, University of Montreal Press, Montreal, 1982.

第三章 Riemann 假设的理论 和计算方面

3.1 Riemann 假设

毫无疑问, 今天最著名的尚未解决的数学问题之一是称之为 Riemann 假设的猜测. 首先介绍一些背景材料, 熟知的 Riemann ζ -函数定义为

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad (1.1)$$

Dirichlet 级数 (1.1) 对任何满足 $\operatorname{Re} z > 1$ 的 z 收敛, 此级数对任何一个固定的 $\sigma > 1$, 在 $\operatorname{Re} z \geq \sigma$ 的任一子集一致收敛. 这就证实了在 $\operatorname{Re} z > 1$ 内 $\zeta(z)$ 是解析的. 人们也知道 $\zeta(z)$ 有表达式

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ 为素数}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}. \quad (1.2)$$

这个公式使 $\zeta(z)$ 在解析数论中具有十分重要的价值. 因为对于任何固定的 $\sigma > 1$, 无穷乘积 (1.2) 在 $\operatorname{Re} z > \sigma$ 中绝对收敛, 而且因为在 $\operatorname{Re}(z) \geq \sigma$ 中该无穷乘积的乘项没有一项为零, 所以在 $\operatorname{Re} z > 1$ 中 $\zeta(z)$ 不为零. 借助于解析开拓可知 (见 Titchmarsh[32, p.13]), 除去 $z = 1$ 之外对所有复数 z , $\zeta(z)$ 是解析的, 1 是 $\zeta(z)$ 的简单极点而且留数为 1, 此外 $\zeta(z)$ 还满足泛函方程

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{z\pi}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z). \quad (1.3)$$

从 (1.3) 可知, 除去在简单实零点 $\{-2m\}_{m=1}^{\infty}$ 上之外, $\zeta(z)$ 在 $\operatorname{Re} z < 0$ 中不为零, 而上述零点被称为 $\zeta(z)$ 的平凡零点. 进一步还知道 (见 [32, p.30]) $\{-2m\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $\zeta(z)$ 仅有的实零点并且 $\zeta(z)$ 有无穷多个非实零点, 这些非实零点都在所谓 $\zeta(z)$ 临界带 $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ 之中. 1859 年, Riemann^[30] 提出了他的著名猜测:

$$\begin{aligned} \text{Riemann 假设(1859): } \zeta(z) \text{ 的全部非实零点} \\ \text{都在 } \operatorname{Re} z = 1/2 \text{ 上.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

后来, 1896 年由 Hadamard 和 de la Vallée-Poussin 独立证明了 $\zeta(z)$ 在直线 $\operatorname{Re} z = 1$ 上没有零点. 他们还给出了著名的素数定理第一个证明

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \rightarrow \infty),$$

这里 $\pi(x)$ 代表不超过 x 的素数的个数. 因为在 $\operatorname{Re} z = 1$ 上 $\zeta(z) \neq 0$, 从 (1.3) 得出在 $\operatorname{Re} z = 0$ 上也没有 $\zeta(z)$ 的零点. 于是 $\zeta(z)$ 在 $0 < \operatorname{Re} z < 1$ 中有无穷多个非实零点. 后来, 在 1914 年 Hardy^[12] 指出在临界线 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上 $\zeta(z)$ 有无穷多个零点, 1974 年 Levinson 证明在临界带中 $\zeta(z)$ 的零点至少有 $1/3$ 落在临界线上. (1989 年 Conrey^[3] 又把这个分数改善到 $2/5$).

多少年来, 甚至在超级计算机出现之前, 已有人用数值计算去求 $\zeta(z)$ 在临界带内的零点. 注意到如果 z 是 $\zeta(z)$ 的非实零点, 那么 (1.1) 和 (1.3) 隐含着 \bar{z} , $1-z$ 和 $1-\bar{z}$ 也是 $\zeta(z)$ 的非实零点. 所以只要在临界带的上半平面, 即在

$$S := \{z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1 \text{ 和 } \operatorname{Im} z > 0\} \quad (1.5)$$

中找 $\zeta(z)$ 的零点就足够了. 1986 年由 Van de Lune, te Riele 和 Winter^[19] 所得到的新数值结果令人难忘地证实了

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在由 } 0 < \operatorname{Im} z \leq 545439823.215 \text{ 定义的 } S \text{ 的子} \\ \text{集中, 正好有 } 1,500,000,001 \text{ 个 } \zeta(z) \text{ 的非实零点,} \\ \text{它们全都落在 } \operatorname{Re} z = 1/2 \text{ 之上而且都是单零点.} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

这个计算在高速计算机上 (主要是 Cyber 205) 花费了 1500 小时. Odlyzko^[22] 在超级计算机 Cray X-MP 上花费了 1000 小时完成了一项同样令人难忘的计算. 它部分是为了验证 Riemann 假设, 但主要是为了验证关于在 $\operatorname{Re} z = 1/2$ 上 $\zeta(z)$ 相邻零点在空间上分布的某些猜测. 他的计算给出了 $\zeta(z)$ 在 S 的子集 T 中的 78,893,234 个连续的零点, T 的定义如下:

$$T := \left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{C}: 0 < \operatorname{Re} z < 1 \text{ 且 } \alpha \leq \operatorname{Im} z \leq \beta, \\ \alpha = 152024401159161800.28, \\ \beta = 15202440115927890387.66. \end{array} \right. \quad (1.7)$$

在矩形 T 中找到的所有零点又都是简单零点并都落在临界线 $\operatorname{Re} z = 1/2$ 上. 经过了如此规模的计算, 迄今没有找到 Riemann 假设的反例, 这就使某些人猜测 Riemann 假设可能成立.

有几种应用范围很广的数学技巧可以用于探索 Riemann 假设的真伪. 本章后面几节中, 我们的目标将集中于几个较窄的方面, 即 Riemann 假设 (以 Riemann ξ -函数零点形式提出的), 1927 年 Pólya 猜测及其最新结果, Laguerre 不等式, Turán 不等式, 这些问题之间的联系.

3.2 Pólya 猜测

这节介绍 1927 年的 G.Pólya 猜测, 它是 Riemann 假设的较弱形式. 开始先用 Riemann[30, p.147] 原来用的记号 (也用于 Pólya[25] 中), 定义 Riemann ξ -函数如下:

$$\xi(iz) = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) \pi^{-\frac{z}{2} - \frac{1}{4}} \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{4}\right) \zeta\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (2.1)$$

其中 ζ 是 (1.1) 中的 ζ 函数. (我们提醒读者 Titchmarsh[32, p.16] 利用 Ξ 代替 ξ). 注意到 $\Gamma(z)$ 和 $\zeta(z)$ 的零点和极点已知, 因此可以得出 $\xi(x)$ 是个整函数, 并可以证明它的阶为 1 (见 [32, p.29]). 此外, Riemann ξ -函数的 Fourier 变换表达式为 (见 [32, p.255])

$$\frac{1}{8} \xi\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^\infty \phi(t) \cos(xt) dt, \quad (2.2)$$

其中, 如果

$$a_n(t) = (2\pi^2 n^4 e^{9t} - 3\pi n^2 e^{5t}) \exp(-\pi n^2 e^{4t}), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

那么

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2.4)$$

为了方便读者及我们后面叙述, 下面我们介绍 Pólya[25] 中的某些结果, 这些结果综述了函数 $\phi(t)$ 的某些已知性质. 在 Csordas, Norfolk 和 Varga[4, 定理 A] 中可以找到 $\phi(t)$ 的其它一些性质.

定理 1(Pólya[25]) 对于 (2.4) 式中的 $\phi(t)$ 有下面结论:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) 对于每个 } n \geq 1, \text{ 和所有的 } t \geq 0 \ a_n(t) > 0, \\ \text{所以对于所有的 } t \geq 0 \ \phi(t) > 0; \\ \text{(ii) 在带状区域 } -\pi/8 < \operatorname{Im} z < \pi/8 \text{ 内 } \phi(z) \text{ 是解析的;} \\ \text{(iii) } \phi(t) \text{ 是偶函数, 所以 } \phi_{(0)}^{(2m+1)} = 0 \ (m = 0, 1, \dots); \\ \text{(iv) 对任何 } \varepsilon > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(t) \exp[(\pi - \varepsilon)t] = 0, \\ \hspace{15em} (n = 0, 1, \dots). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

可在 Pólya[25] 中可以找到 (2.5i)---(2.5iv) 的证明. 除 (2.5iii) 再明显不过以外, 上述 $\phi(t)$ 的几个性质都可以用很直接了当的方法建立起来.

回到积分表达式 (2.2), 把 $\cos(xt)$ 展开并逐项积分, 则可得到 $\xi\left(\frac{x}{2}\right)/\varepsilon$ 的 Maclaurin 级数为

$$\frac{1}{8}\xi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_m (-x^2)^m}{(2m)!}, \quad (2.6)$$

其中

$$\hat{b}_m = \int_0^{\infty} t^{2m} \phi(t) dt \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (2.7)$$

在 (2.6) 中设 $z = -x^2$, 并定义 $F_0(z)$ 为

$$F_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_m z^m}{(2m)!}, \quad (2.8)$$

于是从 (2.6) 就有

$$\frac{1}{8}\xi\left(\frac{x}{2}\right) = F_0(-x^2). \quad (2.9)$$

因为 ξ 是一个阶为 1 的整函数, (2.9) 式表明 F_0 是个阶为 1/2 的整函数. 此外, 从 (2.5i) 可以看出系数 \hat{b}_m 全是正的, F_0 为一个实整函数 (即实的 z 值时 $F_0(z)$ 是实数), 而且对于所有 $x \geq 0$ 都有 $F_0(x) > 0$.

为了把 (2.8) 式中的 F_0 和 Riemann 假设 (1.4) 联系起来, 首先提到下面一件事是很有趣的. Riemann 假设 (见 Riemann[30, p.148])

的原来提法是函数 ξ (见 (2.1)) 的全部零点都是实的. 从 (2.9) 我们可以看出, 当且仅当 $z_0 = -x_0^2$ 是 $F_0(z)$ 的实零点时, x_0 才是 $\xi\left(\frac{x}{2}\right)$ 的一个零点. 因此, 可以得出 Riemann 假设的真实性等价于说 F_0 的所有零点都是实的而且是负的.

其次, 引进下面一类实整函数是很方便的. 按照惯例 $\prod_{j=1}^0 := 1$, 考虑形如

$$f(z) = ce^{-\lambda z^2 + \beta z} z^n \prod_{j=1}^{\omega} \left(1 - \frac{z}{x_j}\right) e^{z/x_j} \quad (0 \leq \omega \leq \infty) \quad (2.10)$$

的实整函数, 其中 $\lambda \geq 0, \beta$ 和 $c \neq 0$ 且为实数, n 为非负整数, x_j 为实的和非零数且满足 $\sum_{j=1}^{\omega} x_j^{-2} < \infty$. 所有可以表示为这种形式的函数被称为 Lagurre-Pólya 类. 如果函数有 (2.10) 的形式则记为 $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. 下面的结果基本上是 Lagurre[17, p.174] 给出的 (见 Boas[1, p.24]).

定理 2(Lagurre[17]) 令 f 是 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中的一个元素 (见 (2.10)), 则

$$L_{p+1}(x, f) := (f^{(p+1)}(x))^2 - f^{(p)}(x)f^{(p+2)}(x) \geq 0 \\ (x \in \mathbb{R}, p = 0, 1, \dots). \quad (2.11)$$

证明 从 (2.10) 可知 f 对数的导数为

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -2\lambda z + \beta + \frac{n}{z} + \sum_{j=1}^{\omega} \left\{ \frac{1}{(z - x_j)} + \frac{1}{x_j} \right\},$$

利用 $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ 的假设, 从这个式子可以得出

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = -\left[2\lambda + \frac{n}{x^2} + \sum_{j=1}^{\omega} \frac{1}{(x - x_j)^2}\right] \leq 0, \quad (2.12)$$

即

$$(f'(x))^2 - f(x)f''(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2.13)$$

我们还知道 (见 Pólya 和 Schur[27]), f 在 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中包含了 f' 也在 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 之中, 这就可以用归纳法给出 (2.11). \square

如果 $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ 中的函数 f 的 Maclaurin 展开式为 $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$,

则在 $x=0$ 点应用 (2.11) 式显然得出

$$mc_m^2 \geq (m+1)c_{m-1}c_{m+1} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (2.14)$$

但如果对于给定的 $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ 中的函数 $\lambda > 0$ 或者 $\omega = \infty$, (2.12) 式就给出 (2.13) 式中的严格不等式, 从而 (2.14) 式也是严格不等式; 即.

$$mc_m^2 > (m+1)c_{m-1}c_{m+1} \quad (m=1, 2, \dots), \quad (2.15)$$

这可以用到下文.

因为 F_0 是一个阶为 $1/2$ 的实整函数, Riemann 假设的真实性的隐含了 F_0 的无穷多个零点全都是实的和负的, 若上述结论成立, 则应用于 (2.8) 的、更强的结果 (2.15) 也成立, 这就给出

$$(\hat{b}_m)^2 > \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right)\hat{b}_{m-1}\hat{b}_{m+1} \quad (m=1, 2, \dots), \quad (2.16)$$

或等价于

$$D_m = (\hat{b}_m)^2 - \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right)\hat{b}_{m-1}\hat{b}_{m+1} > 0 \quad (m=1, 2, \dots). \quad (2.17)$$

因此, 我们看到 (2.16) 的所有不等式是 Riemann 假设成立的必要条件. 在当时的术语里, 不等式 (2.16) 一般被称为 Turan 不等式, 而 (2.17) 中的数 D_m 被称为 Turan 差分.

1925 年 J.L.W.V.Jensen 逝世了, 其后不久的 1925—1926 年 G.Pólya 得到允许研究 Jensen 未曾发表的笔记. 这件事对数学界是很重要的, 因为 Jensen 在十四年前就曾宣布他将发表 Riemann 假设成立的充分必要条件, 但却从未发表, 这些未发表的笔记经 Pólya 重要的发展后, 于 1927 年 Pólya 发表了论文 [25], 该论文包括了 Jensen 以前未曾发表的 Riemann 假设成立的充要条件. 在该文中, Pólya 用了记号

$$b_m = \frac{2 \cdot m!}{(2m)!} \hat{b}_m \quad (m=0, 1, \dots),$$

其中 \hat{b}_m 是 (2.7) 式中所定义的. 于是利用 Pólya 的记号, 把较弱的形式 (2.14) 用到 F_0 就得出

$$b_n^2 - b_{n-1}b_{n+1} \geq 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

在 [25, p.16], Pólya 还提到⁽¹⁾: “迄今我们连关于 ξ -函数零点真实性的几乎最简单的必要条件都没有验证, 这就清楚地表明在这个方向上我们前进的步伐多么微小啊!”

这个提法已经成为熟知的.

Pólya 猜测 (1927):

$$(\hat{b}_m)^2 \geq \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \hat{b}_{m-1} \hat{b}_{m+1} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (2.18)$$

Pólya 猜测具有价值是很正常的: 如果对于某个 $m \geq 1$, 不等式 (2.18) 之一不成立, 或者等价地, 如果对某个 $m \geq 1$ (2.17) 中的 D_m 不是正的, 那么 Riemann 假设就不成立.

再谈点有关 1927 年 Pólya 猜测的历史是值得的. 近 40 年以来, 文献中几乎没有触及这个问题. 在 1966 年和 1969 年 Grosswald^[10,11] 在可允许函数上推广了 Hayman[13] 的一个公式, 作为这个推广的一个应用, Grosswald 用 (2.16) 和 (2.17) 中的记号证明了

$$D_m = (\hat{b}_m)^2 - \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \hat{b}_{m-1} \hat{b}_{m+1} = \frac{(\hat{b}_m)^2}{m} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log m}\right) \right\} \quad (m \rightarrow \infty). \quad (2.19)$$

因为从 (2.5i) 对于所有的 $m \geq 0$, 矩 \hat{b}_m 必须都是正的. Grosswald 的结果 (2.19) 证明了对于充分大的 m , 比如说 $m > m_0$, (2.16) 式成立. 遗憾的是从他的分析中没有确定 m_0 的值, 并据我们所知, 在后来的文献中也没能填补 Grosswald 解决 Pólya 猜测所留下的这个空白.

从下面的计算中可以看出 Turán 不等式 (2.16) 的绝妙性质. 因为从 (2.5i) 得到对于所有的 $t \geq 0$ $\phi(t)$ 是正的. 我们可以把 (2.7) 中的 \hat{b}_m 写成

$$\hat{b}_m^2 = \left\{ \int_0^\infty t^{(2m-2)/2} \sqrt{\phi(t)} \cdot t^{(2m+2)/2} \sqrt{\phi(t)} dt \right\}^2.$$

把 Cauchy-Schwarz 不等式用于这个积分就直接给出 $(\hat{b}_m)^2 \leq \hat{b}_{m-1} \hat{b}_{m+1}$, 我们可以把它等价地写为

$$(\hat{b}_m^2) \leq \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \hat{b}_{m-1} \hat{b}_{m+1} \quad (m=1, 2, \dots). \quad (2.20)$$

(1) 原文中作者在脚注中还引证了这段话的德文部分, 含意完全一样, 故不重复译出. ——译者注

然而 Turán 不等式 (2.16) 却几乎是

$$(\hat{b}_m)^2 > \left(\frac{2m-1}{2m+1} \right) \hat{b}_{m-1} \hat{b}_{m+1} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

逆不等式 Pólya 猜测使我们着迷 (即, G.Csordas, T.S.Norfolk, 和 R.S.Varga) 很大程度上是因为文献中还没有对 Turán 不等式进行过数值上的检验. 因为从 (2.5iv) 看到当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\phi(t)$ 特别快地趋于零, 所以高精度计算 (2.7) 式中的矩 \hat{b}_m 看上去并不可怕. 于是在 1983 年我们就热心地着手对矩 $\{\hat{b}_m\}_{m=0}^{109}$ 进行高精度的计算 (到 50 位有效数字), 并由此来求解 Turán 差分 $\{D_m\}_{m=1}^{108}$, 但这毕竟和发现 $D_m < 0$ 的关系不大.

我们的计算并没给出什么令人惊奇的结果: 全部算出的 D_m 是正的. 在表 3.1 中我们列出 $\{\hat{b}_m\}_{m=0}^{20}$, $\{D_m\}_{m=1}^{20}$ 和 $\{\tilde{D}_m\}_{m=1}^{20}$, 其中

$$\tilde{D}_m = \frac{mD_m}{(\hat{b}_m)^2} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2.21)$$

从而 (见 (2.19))

$$\tilde{D}_m = 1 + O\left(\frac{1}{\log m}\right) \quad (m \rightarrow \infty). \quad (2.21')$$

在表 3.1 中所有的数都已截断到 11 位有效数字. 因为所有的矩 \hat{b}_m 都是正的, 从 (2.21) 式可以看出当且仅当 Turán 差分 D_m 是正的时, \tilde{D}_m 才是正的. 应注意到表 3.1 中的 \tilde{D}_m 随 m 的变化要比相应的 D_m 变化慢的多, 这和 (2.21') 的结果一致.

从表 3.1 可以看出对于 $m \geq 0$, 矩 \hat{b}_m 严格减小但理论上可以容易地证明并非如此, 因此, 无论从数值上或数学上 (用渐近分析) 确定使 \hat{b}_m 达到极小精确的 m 值就变成一个小小的令人感兴趣的数学之谜. 后来得出 (见 Csordas, Norfolk, 和 Varga[5]), 当 $0 \leq m \leq 339$ 时, \hat{b}_m 严格减少, 而 $m \geq 339$ 时, \hat{b}_m 严格增加, 于是

$$\min_{m \geq 0} \hat{b}_m = \hat{b}_{339} = 2.1854010467 \dots 10^{-71}. \quad (2.22)$$

表 3.1

m	\hat{b}_m	D_m	\bar{D}_m
0	6.21400 97273 (-2)	— —	— —
1	7.17873 25984 (-4)	3.58844 91486 (-8)	6.96323 80609 (-2)
2	2.31472 53388 (-5)	3.16329 93950 (-11)	1.18078 64542 (-1)
3	1.17049 98956 (-6)	7.05673 24419 (-14)	1.54519 91985 (-1)
4	7.85969 60229 (-8)	2.83222 02230 (-16)	1.83389 94114 (-1)
5	6.47444 26609 (-9)	1.73636 66894 (-18)	2.07112 67219 (-1)
6	6.24850 92806 (-10)	1.47803 17201 (-20)	2.27134 00906 (-1)
7	6.85711 35660 (-11)	1.64153 36845 (-22)	2.44379 71530 (-1)
8	8.37956 28564 (-12)	2.27744 38477 (-24)	2.59474 65240 (-1)
9	1.12289 59005 (-12)	3.82273 77260 (-26)	2.72858 83427 (-1)
10	1.63076 65724 (-13)	7.57537 75877 (-28)	2.84852 92500 (-1)
11	2.54307 50583 (-14)	1.73849 34268 (-29)	2.95697 31508 (-1)
12	4.22669 38654 (-15)	4.54925 56467 (-31)	3.05576 53485 (-1)
13	7.44135 71845 (-16)	1.34019 54348 (-32)	3.14635 11038 (-1)
14	1.38066 04233 (-16)	4.39776 86757 (-34)	3.22988 20677 (-1)
15	2.68793 65964 (-17)	1.59301 19382 (-35)	3.30728 97809 (-1)
16	5.47056 43869 (-18)	6.32085 57309 (-37)	3.37933 76956 (-1)
17	1.16018 31858 (-18)	2.72899 35268 (-38)	3.44665 87993 (-1)
18	2.55669 85949 (-19)	1.27457 93250 (-39)	3.50978 33473 (-1)
19	5.84001 96623 (-20)	6.40679 74312 (-41)	3.56915 96545 (-1)
20	1.37967 28720 (-20)	3.45025 04583 (-42)	3.62516 99207 (-1)

最后, 本节中还应做两点说明: 第一, 如何计算出矩 $\{\hat{b}_m\}_{m=0}^{109}$ 的细节将在 §3.6 中给出; 第二, 确定出表 3.1 中的数值并非是做虚功, 因为我们将在 §3.3 中看到, 这些数值计算对我们严格证明 Pólya 猜测的真实性给出了一些启发, 也许还给出了更多东西.

3.3 Pólya 猜测再探

1986 年, Csordas, Norfolk 和 Varga[4] 对下述事实给出了一个很长的证明 (由 12 个引理构成), 如果 (见 (2.4))

$$\Psi(t) = \int_t^{\infty} \phi(\sqrt{u}) du \quad (t \geq 0), \quad (3.1)$$

则

$$\log \Psi(t) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上是严格凹的.} \quad (3.2)$$

利用 (3.2) 在 [4] 中验证了 Pólya 猜测的真实性, 亦即利用构造性的方法解决了长达近 60 年之久的 Pólya 猜测!

为了我们这里的需要, 下面我们介绍 Csordas 和 Varga [7] 后来的结果, 它类似于 (3.2), 但由它可以得出比 Pólya 猜测更强的结果. 我们先给出

定理 3([7]) (2.4) 中的函数 $\Phi(t)$ 有如下性质

$$\log \phi(\sqrt{t}) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上是严格凹的.} \quad (3.3)$$

证明 (梗概) 从定理 1 的 (2.5ii) 函数 $\phi(z)$ 在带状区 $-\pi/8 < \operatorname{Im} z < \pi/8$ 上是解析的. 它包含了 $\phi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, 并因为从 (2.5i) 可知对于所有的 $t > 0$ $\phi(t) > 0$, 可以验证, 当而仅当在 $(0, +\infty) g(t) > 0$ 则 $(d^2/dt^2) \log \Phi(\sqrt{t}) < 0$. 其中

$$g(t) = t[(\Phi'(t))^2 - \phi(t)\phi''(t)] + \Phi(t)\Phi'(t) \quad (t \geq 0), \quad (3.4)$$

在 [7] 中, 一个很长的推导 (由 10 个引理组成, 我们不再这里叙述) 确定了不同区间上 $\phi^{(j)}(t)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) 界. 得到,

$$\begin{cases} g(t) > 0 & (0 < t \leq 0.03), \\ g(t) > 0 & (0.03 \leq t \leq 0.06), \\ g(t) > 0 & (0.056 \leq t < \infty), \end{cases} \quad (3.5)$$

这就给出了 (3.3) 所要的结果.

这里我们要提到, 早在 1982 年, 当时我们不知道, Matiyasevich [20] 已经把 (2.17) 中的 Turán 差分表示为下面有用的三重积分: 对任何 $m \geq 1$, 我们有

$$\begin{aligned} & 2(2m+1)D_m \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2m} v^{2m} \phi(u) \phi(v) \left[(v^2 - u^2) \right. \\ & \quad \left. \int_u^v -\frac{d}{dt} \left(\frac{\phi'(t)}{t\phi(t)} \right) dt \right] du dv. \end{aligned} \quad (3.6)$$

利用 (3.4) 中 $g(t)$ 的定义, 上述结果也可以表示为, 对 $m \geq 1$

$$2(2m+1)D_m = \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2m} v^{2m} \phi(u) \phi(v) \left[(v^2 - u^2) \int_u^v \frac{g(t) dt}{t^2 \phi^2(t)} \right] du dv. \quad (3.7)$$

因为根据 (3.5) 和 (2.5i) 可知在 $(0, +\infty)$ 上 $g(t)$ 和 $\Phi(t)$ 都是正的, 显然对于 $0 \leq u, v < \infty$ 中所有的 u, v (3.7) 式括号中的量是非负的. 因为 (3.7) 中被积函数里其余部分也是非负的, 从而对于任何 $m \geq 1$ 有 $D_m > 0$. 最终得出 (见 (2.12) 和 (2.13)), Polya 猜测是对的.

有趣的是, Matiyasevich 声称, 他利用和证明方法具有同样效用的区间计算验证 (3.4) 式的 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是正的. 然而和证明 (3.5) 一样, 说明 $g(t) > 0$ 的区间算法也是把区间 $(0, +\infty)$ 分成几个部分. 我们在 [20] 中没能找到足够的论据来完全验证了他的计算, 但他所说的在 $(0, +\infty)$ 上 $g(t) > 0$ 当然是对的. 因为 [7] 中给出了正面的证明, 在 [4] 中还给出了 $\Psi(t)$ 的对数凹性. 我们强调, 我们解决 Polya 猜测的途径是基于在 $(0, +\infty)$ 上 $\log \phi(\sqrt{t})$ 是严格凹函数这一独立概念, 它还可用于证明更一般的结果 — 本节的定理 4.

接下来, 假设 $K(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) 在 } \mathbb{R} \text{ 上 } K \text{ 是可积的,} \\ \text{(ii) } K(t) > 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \\ \text{(iii) } K(t) = K(-t) \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ 且} \\ \text{(iv) 对于某个 } \epsilon > 0, K(t) = O(\exp(-|t|^{2+\epsilon})) \quad (t \rightarrow \infty). \end{array} \right. \quad (3.8)$$

这种函数被称为可允许核函数. 众所周知 (见 Pólya[26]) 可允许核函数 $K(t)$ 的 Fourier 变换

$$H(x, K) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{ixt} dt = 2 \int_0^\infty K(t) \cos(xt) dt \quad (3.9)$$

为一个具有有限阶数 φ 的实整函数, 如果用 (3.8iv) 中的 ϵ , 那么这里的阶数 φ 满足

$$\varphi \leq \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon} < 2. \quad (3.10)$$

此外, 如果 $K(t)$ 是一个可允许核函数并且 (3.9) 中的 $H(x, K)$ 只有实零点, 那么 Pólya[26] 中的另一个漂亮的结果是证明整函数

$$J(x; K, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(it)K(t)e^{ixt}dt \quad (f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}) \quad (3.11)$$

也只有实零点. 用 Pólya 所引用的术语来说 (见 [26], p.7) 函数 $f(it)$ 是通用因子, 它保证了 (3.9) 式中整函数 $H(x, K)$ 零点的实性 (事实上, Pólya 在 [26] 中证明在 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中的函数是具有这种性质的唯一的解析函数).

进一步利用上述结果. 首先, 从 (2.5) 显然有 $\phi(t)$ 满足 (3.8), 所以 $\phi(t)$ 是可允许核函数. 其次, 用 (3.9) 的符号, 我们有 (见 (2.2))

$$H(x, \Phi) = 2 \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos(xt)dt = \frac{1}{4} \xi\left(\frac{x}{2}\right). \quad (3.12)$$

因此, Riemann 假设成立将蕴涵着 $H(x, \Phi)$ 只有实零点. 现在, 考虑 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中的任意偶函数 f , 即从 (2.10) 得

$$f(z) = ce^{-\lambda z^2} z^{2n} \prod_{j=1}^{\omega} \left(1 - \frac{z^2}{x_j^2}\right) \quad (0 \leq \omega \leq \infty), \quad (3.13)$$

其中 $\lambda \geq 0$, c 是一个非零实常数, n 是个非负整数, 且 $x_j > 0$ 并满足 $\sum_{j=1}^{\omega} 1/x_j^2 < \infty$. 但是, 除了一个符号以外, 不难验证对于任何一个 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中的偶函数 $f(it)\Phi(t)$ 是个可允许核函数, 为此要用到性质 (2.5). 进而,

$$J(x; \Phi, f) = 2 \int_0^{\infty} f(it)\Phi(t) \cos(xt)dt \quad (3.14)$$

是阶数小于 2 的实整函数 (从 (3.10) 可知). 此外, 从我们以上的讨论可知, Riemann 假设成立隐含着, 对任何 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中的偶函数 f , $J(x; \Phi, f)$ 仅有实零点. 现在 $J(x; \Phi, f)$ 的 Maclaurin 展式为

$$J(x; \Phi, f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_m(f)(-x^2)^m}{(2m)!}, \quad (3.15)$$

其中

$$\hat{b}_m(f) = 2 \int_0^{\infty} t^{2m} f(it)\Phi(t)dt \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (3.16)$$

并在 (3.15) 中设 $z = -x^2$, 和 (2.8) 相似我们得到

$$F(z; f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_m(f) z^m}{(2m)!}, \quad (3.17)$$

从 (3.10) 式它的阶数小于 1. 然后把定理 2 用到 $F(z; f)$, Riemann 假设成立就隐含着

$$D_m(f) = (\hat{b}_m(f))^2 - \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \hat{b}_{m-1}(f) \hat{b}_{m+1}(f) > 0 \quad (3.18)$$

$$(m = 1, 2, \dots).$$

对于 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中任一偶函数 f 成立. 我们注意到 (3.18) 是 Pólya 猜测 (2.18) 的广义形式, 因为在 (2.18) 中选择 $f(z) \equiv 1$, 它就化为 (2.18).

根据定理 3 的 (3.3) 式中 $\phi(\sqrt{t})$ 的对数凹性, 我们现在给出下面 Csordas 和 Varga[7] 中的下述结果

定理 4([7]) 对于形如

$$h(z) = ce^{-\lambda z^2} z^{2n} \prod_{j=1}^{\omega} \left(1 - \frac{z^2}{x_j^2}\right) \quad (0 \leq \omega \leq \infty) \quad (3.19)$$

的整函数, 其中 λ 和 $c \neq 0$ 是实常数, n 是非负整数 x_j 实的非零数满足 $\sum_{j=1}^{\omega} 1/x_j^2 < \infty$. 设

$$\hat{b}_m(h) = 2 \int_0^{\infty} t^{2m} h(it) dt \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (3.20)$$

那么, 由

$$D_m(h) = (\hat{b}_m)^2 - \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \hat{b}_{m-1}(h) \hat{b}_{m+1}(h) \quad (3.21)$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

定义的 Turán 差分满足

$$D_m(h) > 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.22)$$

证明 根据假设, 核函数

$$K(t) = h(it)\Phi(t) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (3.23)$$

(可能差一个符号) 是一个可允许核函数, 并从 (3.7) 和 (3.3) 可以证明

$$\log K(\sqrt{t}) \quad \text{在 } (0, +\infty) \text{ 是严格凹函数.} \quad (3.24)$$

显然

$$K(\sqrt{t}) = \tilde{c} e^{\lambda t} t^n \prod_{j=1}^{\omega} \left(1 + \frac{t}{x_j^2}\right) \phi(\sqrt{t}) \quad (\tilde{c} = (-1)^n c),$$

于是

$$\log K(\sqrt{t}) = \log \tilde{c} + \lambda t + n \log t + \sum_{j=1}^{\omega} \log \left(1 + \frac{t}{x_j^2}\right) + \log \Phi(\sqrt{t}).$$

求导数后, 我们得到

$$\frac{d^2}{dt^2} \log K(\sqrt{t}) = -\left[\frac{n}{t^2} + \sum_{j=1}^{\omega} \frac{1}{(x_j^2 + t)^2}\right] + \frac{d^2}{dt^2} \log \Phi(\sqrt{t}) \quad (t > 0).$$

因为在上式括号中的项对于所有 $t > 0$ 都是非负的, 并因为根据 (3.3), 上式中最后一项是负的, 于是就得到 (3.24).

重要的是要注意到定理 4 允许所有的实 λ , 而上面关于偶普遍因子的讨论只允许 $\lambda \geq 0$.

定理 4 的结果也适用于非常一般的情况, 其实考虑任何形如

$$\hat{H}(x) = \int_0^{\infty} K(t) \cos(xt) dt \quad (3.25)$$

的任意整函数, 其中 $K(t)$ 是 $C^2(R)$ 中的任一函数, 只要它是一个可允许核函数 (见 (3.8)). 令对应于函数 $K(t)$ 的矩定义为

$$\hat{c}_m = \int_0^{\infty} t^{2m} K(t) dt \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.26)$$

那么整函数 $\hat{H}(x)$ 只有实零点的一个必要条件是

$$\hat{c}_m^2 > \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \hat{c}_{m-1} \hat{c}_{m+1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (3.27)$$

根据定理 4, (3.27) 成立的一个充分条件是

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(K(\sqrt{t})) < 0 \quad (t > 0). \quad (3.28)$$

为了给出如何应用 (3.28) 的一个例子, 和 [7] 里一样让我们考虑函数 $\hat{K}(t) := \exp(-2 \cos h(t))$. 大家都知道 (见 Pólya[24]) $\hat{K}(t)$ 的余弦变换, 即

$$\int_0^\infty \exp(-2 \cos h(t)) \cos(xt) dt$$

为一个仅有实零点的实整函数, 因为

$$\log \hat{K}(\sqrt{t}) = -2 \cos h(\sqrt{t}),$$

那么

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \hat{K}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin h(\sqrt{t})}{t^{3/2}} - \frac{\cos h(\sqrt{t})}{t} \right\} \quad (t > 0).$$

但因为括号中函数的 Maclaurin 展开式 (关于变量 $u = \sqrt{t}$) 的系数全为负的, 我们看到使不等式 (3.27) 成立的充分条件 (3.28) 得以满足. 有趣的是核函数 $\hat{K}(t) = \exp(-2 \cos h(t))$ 不能被表示为 $f(it)$, 这里 $f(z)$ 具有形如 (2.10) 式的形式, 所以这个例子不能包含偶通用因子.

作为前面结果的另一个应用, 我们有如下推论

推论 5*([7]) 令

$$K_\lambda(t) = \phi(t) \cos h(\lambda t) \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (3.29)$$

其中 $\phi(t)$ 定义如 (2.4), 且令

$$\hat{c}_m(\lambda) = \int_0^\infty t^{2m} K_\lambda(t) dt \quad (m = 0, 1, \dots), \quad (3.30)$$

那么

$$(\hat{c}_m(\lambda))^2 > \left(\frac{2m-1}{2m+1} \right) \hat{c}_{m-1}(\lambda) \hat{c}_{m+1}(\lambda) \quad (m = 1, 2, \dots; \lambda \in \mathbb{R}). \quad (3.31)$$

证明 只要证明下述不等式成立, 就可推导出不等式 (3.31)

$$\frac{d^2}{dt^2} \log K_\lambda(\sqrt{t}) = \frac{d^2}{dt^2} \log \Phi(\sqrt{t}) + \frac{d^2}{dt^2} \log(\cos h(\lambda\sqrt{t})) < 0 \quad (0 < t < \infty).$$

但由 (3.3), 显然只要证明 $\frac{d^2}{dt^2} \log(\cosh(\lambda\sqrt{t})) \leq 0$ 对所有 $0 < t < \infty$ 和所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立就足够了. 因为简单的计算表明, 当且仅当

$$\sigma_\lambda(u) = -\lambda^2 u + \lambda \sinh(2\lambda u)/2 \geq 0 \quad (0 < u < \infty, \lambda \in \mathbb{R}) \quad (3.32)$$

($u = \sqrt{t}$) 成立时, 所需不等式就成立. 但因为 $\sigma_\lambda(0) = 0$, 且 $\sigma'_\lambda(u) = \lambda^2 \{-1 + \cosh(2\lambda u)\} \geq 0$, 所以 (3.32) 成立. \square

已知不等式 (3.31) 在 $\lambda \geq 1$ (见 Pólya[25, p.32]) 和 $\lambda = 0$ (见 [4]) 的特殊情况下成立. 对于 $\lambda = 1$, (3.29) 式中的核函数 $K_1(t)$ 有重要价值, 因为 Pólya 在 [25] 中指出 $K_1(t)$ 的 Fourier 余弦变换, 即

$$F_1(x) = \int_0^\infty K_1(t) \cos(xt) dt, \quad (3.33)$$

仅有实零点. Pólya 方法也指出整函数

$$F_\lambda(x) = \int_0^\infty K_\lambda(t) \cos(xt) dt.$$

如果 $\lambda \geq 1$ 也仅有实零点并且最终得到所有的 $\lambda \geq 1$ (3.31) 式成立.

3.4 de Bruijn-Newman 常数 Λ

我们提醒读者注意, Riemann ξ 函数有 Fourier 变换表达式 (见 (2.2))

$$\frac{1}{8} \xi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{ixt} dt = \int_0^\infty \phi(t) \cos(xt) dt, \quad (4.1)$$

其中

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi^2 n^4 e^{9t} - 3\pi n^2 e^{5t}) \exp(-\pi n^2 e^{4t}). \quad (4.2)$$

对于任意实数 λ , 在 (4.1) 的被积函数中我们引进 $e^{\lambda t^2}$ 并设

$$H_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda t^2} \phi(t) e^{ixt} dt = \int_0^\infty e^{\lambda t^2} \phi(t) \cos(xt) dt, \quad (4.3)$$

因此由 (2.2) 式, $H_0(x) = \xi(x/2)/8$. 展开 $\cos(xt)$, 则得到 $H_\lambda(x)$ 的 Maclaurin 展开式为

$$H_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_m(\lambda)(-x^2)^m}{(2m)!}, \quad (4.4)$$

其中 $\hat{b}_m(\lambda) = \int_0^\infty t^{2m} e^{\lambda t^2} \phi(t) dt$, ($m = 0, 1, \dots, \lambda \in \mathbb{R}$). 从 Csordas, Norfolk 和 Varga[6, 附录 A] 得知对每个实值 λ , $H_\lambda(x)$ 是阶为 $1(\infty)$ 类型的整函数. 此外, 从 (2.5i) 可知, 对于所有的实值 t 有 $\phi(t) > 0$, 则对所有 $m = 0, 1, 2, \dots$ 和所有实值 λ 都有 $\hat{b}_m > 0$. 最终有, 对于所有实值 λ , (4.4) 式的 $H_\lambda(x)$ 是一个一阶整函数.

我们在本节中主要考虑把 $H_\lambda(x)$ 的零点作为实参数 λ 的函数时的性质, 并把它和 Riemann 假设联系起来. 开始, 我们先注意到, $g(t) = e^{-\lambda t^2}$ 对于 $\lambda \geq 0$ (见 (2.10)), 是 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 的一个元素, 于是

$$g(it) = e^{\lambda t^2} \quad (\lambda \geq 0)$$

是一个由 Pólya 所定义的一个通用因子, 因此, 从 Pólya[26] 得知, 如果 $H_0(x) = \xi(x/2)/8$ 仅有实零点, 那么对任何 $\lambda \geq 0$, (4.3) 式中的 $H_\lambda(x)$ 也如此. 接下来 Bruijn[2] 中的两个结果给出

(i) 对任何 $\lambda \geq 1/2$ $H_\lambda(x)$ 仅有实零点;

(ii) 如果对某个实值 λ $H_\lambda(x)$ 仅有实零点,

则对任何 $\lambda' > \lambda$, $H_{\lambda'}(x)$ 也仅有实零点. (4.6)

特别地, Riemann 假设成立就蕴涵对任何 $\lambda \geq 0$ $H_\lambda(x)$ 仅有实零点.

有意思的是, 近来 Newman[21] 指出存在一实数 Λ 满足 $-\infty < \Lambda \leq 1/2$, 使得

$$\begin{cases} \text{当 } \lambda \geq \Lambda \text{ 时, } H_\lambda(x) \text{ 仅有实零点, 且} \\ \text{当 } \lambda < \Lambda \text{ 时, } H_\lambda(x) \text{ 有某些非实零点.} \end{cases} \quad (4.7)$$

由于 de Bruijn 早年从事有关这一方面的研究工作, 称这个常数为 Bruijn-Newman 常数是合适的.

在 [21] 中 Newman 证明 Λ 存在性的方法不是构造性的, 所以在 [21] 中没有关于 Λ 明显下界的任何信息. 至于 Λ 的上界, 可以肯定

$\Lambda \leq 1/2$ 成立. Riemann 假设成立将蕴涵着 $\Lambda \leq 0$. (Newman[21] 提供了一个附加的猜测 $\Lambda \geq 0$, 他说到“这个新猜测是下述说法的一个量化形式, 即使 Riemann 假设成立也不过是很勉强的.”) 因此, 我们将面临一个新问题 (和 Riemann 假设相关的), 也就是要数值上确定 de Bruijn-Newman 常数 Λ 的上、下界. 当写这本书时, 仅有人考虑要给出 Λ 下界的数值结果, 下面我们报告这方面的活动, 在讨论新近发现 Λ 下界之前, 我们给出对于 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 函数某些有用的理论结果.

首先, 在 (4.4) 中设 $z = -x^2$, 并定义 $F_\lambda(z)$:

$$F_\lambda(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_m(\lambda) z^m}{(2m)!}, \quad (4.8)$$

其中 $\hat{b}_m(\lambda)$ 由 (4.5) 式给出. 因为 (4.4) 中的 $H_\lambda(x)$ 和 (4.8) 中的 $F_\lambda(z)$ 有如下关系

$$H_\lambda(x) = F_\lambda(-x^2) \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (4.9)$$

因此, 显然对于某个选定的实 λ $F_\lambda(z)$ 是一个 $1/2$ 阶的实整函数, 它必定有 (见 Boas[1, p.24] 无穷多个 (可能有某些是非实的) 零点, 此外, 因为 $\hat{b}_m(\lambda) > 0$ 蕴涵了在射线 $z \geq 0$ 上 F_λ 是正的, 那么从 (4.7) 和 (4.9) 式可知

$$\begin{cases} \text{当 } \lambda \geq \Lambda \text{ 时, } F_\lambda(z) \text{ 仅有负的实零点, 且} \\ \text{当 } \lambda < \Lambda \text{ 时, } F_\lambda(z) \text{ 有某些非实零点.} \end{cases} \quad (4.10)$$

但从 (2.10) 中 Laguerre-Pólya 函数类的定义得知 (4.10) 式可简洁地表示为

$$\begin{cases} \text{当 } \lambda \geq \Lambda \text{ 时, } F_\lambda \in \mathcal{L} - \mathcal{P}, \text{ 且} \\ \text{当 } \lambda < \Lambda \text{ 时, } F_\lambda \notin \mathcal{L} - \mathcal{P}, \end{cases} \quad (4.11)$$

它可以用在下面的叙述中.

考虑在 $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ 中任一元素 $G(z)$, 我们可以把它写成如下形式

$$G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_m}{m!} z^m, \quad (4.12)$$

并令 $G_n(z)$ 代表相应于它的 n 阶 Jensen 多项式:

$$G_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r_k t^k \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (4.13)$$

Pólya, Schur[27] 中的一个已知结果为

$$G(z) \in \mathcal{L} - \mathcal{P} \text{ 当且仅当 } G_n(t) \in \mathcal{L} - \mathcal{P} \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (4.14)$$

或者等价于

$$\begin{aligned} G(z) \in \mathcal{L} - \mathcal{P} \text{ 当且仅当对于所有的 } n = 1, 2, \dots \\ G_n(t) (\neq 0) \text{ 只有实零点.} \end{aligned} \quad (4.15)$$

用 (4.15) 式, 我们立刻有下面结果.

命题 6([6]) 假设有一个正整数 m 和实数 λ 使得 (4.8) 式给出函数的 m 阶 Jensen 多项式

$$G_m(t; \lambda) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\hat{b}_k(\lambda) \cdot k!}{(2k)!} t^k \quad (4.16)$$

仅有实零点, 那么

$$\lambda < \Lambda. \quad (4.17)$$

命题 6 给我们提供了按下面数值算法求出 de Bruijn-Newman 常数 Λ 下界的基础:

- (i) 固定一个实数 $\lambda < 0$;
- (ii) 用 (4.5) 式高精度地算出矩 $\{\hat{b}_k(\lambda)\}_{k=0}^N$ 的估计值 $\{\hat{\beta}_k(\lambda)\}_{k=0}^N$;
- (iii) 用 (ii) 和 (4.16) 构成近似的 Jensen 多项式

$$g_m(t; \lambda) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\hat{\beta}_k(\lambda) k!}{(2k)!} t^k \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (4.18)$$

- (iv) 用高精度求多项式根的算法求 $g_m(t; \lambda)$ ($m = 1, 2, \dots, N$) 的零点;

(v) 如果有一个正整数 $m(1 \leq m \leq N)$, (iii) 中的 m 阶近似 Jensen 多项式 $g_m(t; \lambda)$ 有非实零点, 然后理论上证明, 相应准确的 Jensen 多项式 $G_m(t; \lambda)$ 也保证有非实零点, 则 $\lambda < \Lambda$.

当“保证”这个词用在上节中时肯定深得分析学家之人心. 下节中我们更仔细地讨论这点.

3.5 通过 Jensen 多项式探索 Λ 的下界

在 Csordas, Norfolk 和 Varga[6] 中, 我们按照命题 6 的办法找到了 de Bruijn-Newman 常数 Λ 的一个具体的下界. 特别地, 选择 $\lambda = -50$, 我们用 Romberg 积分方法 (见 Stoer 和 Bulirsch[31, p.136] 计算了矩 $\{\hat{b}_m(-50)\}_{m=0}^{16}$ 的数值, 其相对精度至少有 60 位有效数字, (4.18) 中第十六个相关的近似 Jensen 多项式 $g_{16}(t; -50)$ 有非实零点

$$z_1 = -220.919111736844951 \cdots + i7.09256525536388967 \cdots, \quad (5.1)$$

其模为

$$|z_1| = 221.032935130713450 \cdots. \quad (5.2)$$

为了表明 (4.16) 中准确的 Jensen 多项式 $G_{16}(t; -50)$ 也保证有非实零点, 在 [6] 中我们用到了下述 Ostrowski 的结果 [23, 附录 B].

命题 7(Ostrowski[23]) 令 $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ ($a_0 a_n \neq 0$) 且 $h(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j$ 是两个复多项式, 并令 $f(z)$ 的零点为 $\{z_j\}_{j=1}^n$ (它们均为非零, 但允许是多重零点), 假定有一个正实数 τ 且满足 $4n\tau^{1/n} \leq 1$, 使得

$$|b_j - a_j| < \tau |a_j|, \quad (j = 0, 1, \cdots, n), \quad (5.3)$$

那么, $h(z)$ 的 n 个零点 $\{w_j\}_{j=1}^n$ 可按一定次序排列, 并使得

$$|w_j - z_j| < 8n\tau^{1/n} |z_j| \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \quad (5.4)$$

利用命题 7, 在 [6] 中得到了如下结果:

命题 8([6]) 如果 Λ 是 de Bruijn-Newman 常数, 那么

$$-50 < \Lambda. \quad (5.5)$$

证明 设 $f(z) = g_{16}(z; -50) = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \frac{\hat{\beta}_k(-50)k!z^k}{(2k)!}$ 和 $h(z) = G_{16}(z; -50) = \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} \frac{\hat{b}_k(-50)k!z^k}{(2k)!}$, 由于近似矩 (数值计算出的) $\hat{\beta}_k(-50)$ 和精确矩 $b_k(-50)$ 之间的精确度使得

$$|\hat{b}_k(-50) - \hat{\beta}_k(-50)| \leq 10^{-60} \hat{\beta}_k(-50) \quad (k = 0, 1, \dots, 16).$$

我们看出如取 $\hat{\tau} = 10^{-60}$, 则 (5.3) 式成立, 这样 $8n\hat{\tau}^{\frac{1}{n}} \leq 2.27620 \cdot 10^{-2}$ 对 $n = 16$ 时成立. 那么, 对于 (5.1) 中的 z_1 , 从命题 7 的 (5.4) 式得出, 存在 $G_{16}(z, -50)$ 的一个零点 w_1 使得

$$|w_1 - z_1| \leq (2.27620 \cdot 10^{-2})|z_1| < 5.03116, \quad (5.6)$$

但因 $|\operatorname{Im} w_1 - \operatorname{Im} z_1| \leq |w_1 - z_1|$, 上述不等式和 (5.1) 一起给出

$$|\operatorname{Im} w_1 - 7.09256 \dots| < 5.03116.$$

于是有

$$\operatorname{Im} w_1 > 2.06164, \quad (5.7)$$

从而 $G_{16}(z; -50)$ 有一个非实零点, 再用命题 6 就得到所需结果. \square

Λ 的下界 (5.5) 是得到的第一个下界. 正如 [6] 中提到的, 这一结果的重要性不在其本身而在于找到了一种得到 Λ 下界的构造性方法. 那篇论文还很乐观地认为, 可以用这种方法找到改进的下界.

Ostrowski 的命题 7 虽给出了两个相近多项式所有零点之间的总体相对精度, 但在利用命题 7 证明定理 8 时, 即当比较两个相近多项式的两个特定简单零点 (即非多重零点) 时, 命题 7 是远远不够用的. 基于这点, 我们给出下面初等的但很有用的结果.

引理 9 令 $p(z)$ 为 $-n$ 阶复多项式, 如果 $p'(z_1) \neq 0$, 那么圆盘

$$|z - z_1| \leq n|p(z_1)|/|p'(z)| \quad (5.8)$$

至少包含 $p(z)$ 的一个零点.

证明 因为当 $p(z_1) = 0$ 时, 引理 9 是显然的, 所以假设 $p(z_1) \neq 0$. 并把 $p(z)$ 写成 $p(z) = r \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k)$, 其中 ζ_k 是 $p(z)$ 的零点. 取

$p(z)$ 的对数导数并计算其在 z_1 点的值, 得到

$$\frac{p'(z_1)}{p(z_1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_1 - \zeta_k},$$

在上式中取绝对值, 我们有

$$\frac{|p'(z_1)|}{|p(z_1)|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z_1 - \zeta_k|} \leq \frac{n}{\min_{1 \leq k \leq n} |z_1 - \zeta_k|},$$

把它再改写一次, 恰好就是 (5.8).

不必再考虑细节, 利用引理 9 而不用命题 7, 在计算矩 $\hat{b}_m(\lambda)$ 时只要求少得多的准确数字位数就足可以保证 $G_{16}(z; -50)$ 有非实零点. 在 Varga, Norfolk 和 Ruttan[33] 中, 利用这种方法相继得到了 n 个改进后的常数 Λ 的下界. 这些结果列在表 3.2 中, 其中第二列数字是保证有非实零点的第一个 Jensen 多项式的阶数

表 3.2

λ	阶数 n	所需数字位数	零点
-100	10	12	$-453.840 \dots + i9.703 \dots$
-50	16	12	$-220.919 \dots + i7.092 \dots$
-20	41	18	$-111.065 \dots + i1.322 \dots$
-15	56	20	$-79.834 \dots + i0.282 \dots$
-10	97	21	$-45.530 \dots + i0.156 \dots$
-8	142	21	$-30.993 \dots + i0.124 \dots$

从表 3.2 看出, 随着 λ 逐渐递增到零, 给出非实零点的 Jensen 多项式的阶也迅速增长, 所要求的有效数字的位数 (第三列) 也有所增长. 为了避免这点, te Riele^[29] 利用 Jensen 多项式的方法, 并且利用有关 Sturm 序列的修正, 最近给出了下界

$$-5 < \Lambda, \quad (5.9)$$

这个结果是在有关计算中用了 250 位精度对于 406 阶 Jensen 多项式计算出来的!

在下节中用不同的方法给出大大改进的 de Bruijn-Newman 常数 Λ 的下界.

3.6 追踪 $F_\lambda(z)$ 的零点

从定义 (4.8) 中显然可以看出, 如果对于某个实的 $\lambda < 0$, (4.8) 式中的 $F_\lambda(z)$ 有非实零点, 那么从 (4.11) 可知, $F_\lambda(z) \notin \mathcal{L} - \mathcal{P}$, 从而 $\lambda < \Lambda$. 因为 $F_\lambda(z)$ 是一个 $1/2$ 阶的整函数, 它必有无穷多个零点 (见 Boas[1, p.24]). 现在考虑直接追踪 $F_\lambda(z)$ 的特定零点. 进而, 我们注意到 (4.8) 中的 $F_\lambda(z)$ 和 (4.3) 类似可以表示为积分方程形式

$$F_\lambda(z) = \int_0^\infty e^{\lambda t^2} \Phi(t) \cosh(t\sqrt{z}) dt \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (6.1)$$

现在假设对于一实的 λ_0 , $z(\lambda_0)$ 是 $F_{\lambda_0}(z)$ 的某个单零点使得在包含 λ_0 的某个 λ 的小区间内, $z(\lambda)$ 仍为 $F_\lambda(z)$ 的一个单零点. 在该区间中, $F_\lambda(z(\lambda)) \equiv 0$, 这里用到了 (4.5) 中 $\hat{b}_m(\lambda)$ 的定义

$$\begin{aligned} F_\lambda(z(\lambda)) \equiv 0 &= \int_0^\infty e^{\lambda t^2} \Phi(t) \cosh(t\sqrt{z}) dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_m(\lambda)}{(2m)!} (z(\lambda))^m. \end{aligned} \quad (6.2)$$

对于 λ 微分 (6.2) 式, 我们得到

$$0 \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_{m+1}(\lambda)(z(\lambda))^m}{(2m)!} + \frac{dz(\lambda)}{d\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)\hat{b}_{m+1}(\lambda)(z(\lambda))^m}{(2m+2)!}.$$

因为 $z(\lambda)$ 假设为单零点, 所以上式中与 $-\frac{dz(\lambda)}{d\lambda}$ 相乘的和项不为零, 所以解出 $\frac{dz(\lambda)}{d\lambda}$.

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \hat{b}_{m+1}(\lambda)(z(\lambda))^m / (2m)!}{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\hat{b}_{m+1}(\lambda)(z(\lambda))^m / (2m+2)!}. \quad (6.3)$$

重要的是注意到 $\hat{b}_m(\lambda) = \int_0^\infty t^{2m} e^{\lambda t^2} \phi(t) dt$, 那么用 $e^{\lambda t^2}$ 的

Maclaurin 展开代替它并逐项积分得到

$$\hat{b}_m(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_{m+j}(0)\lambda^j}{j!}, \quad (j = 0, 1, \dots, \lambda \in \mathbb{R}). \quad (6.4)$$

因此对于负的小 λ 来说, 人们需要从 (6.4) 中算出一个高精度的 $\{\hat{b}_m(0)\}_{m=0}^N$, 从这个表再利用 (6.4) 可以直接估计出矩 $\{\hat{b}_m(\lambda)\}_{m=0}^{N'}$. 事实上, 在肯特州立大学数学系的 Encore 并行计算机上, 在足够密的格点上用简单的梯形法则计算出矩 $\{\hat{b}_m(0)\}_{m=0}^{1600}$ 的具有 220 位有效数字的数值. 更准确地说, 如果 $T_h(m)$ 利用梯形法则计算 $\hat{b}_m(0)$ 而得到的近似值 (步长为 h 的均匀格点), 那么从 (2.5ii) 可以证明 (见 [33])

$$|T_h(m) - \hat{b}_m(0)| = O\left(\exp\left(\frac{-(\pi^2 - \varepsilon)}{4h}\right)\right) \quad (h \rightarrow 0).$$

这种几何收敛性使得用梯形法则既快又准确.

接下来, 令 $\{\varphi_j = \frac{1}{2} + it_j\}_{j=1}^{15,000}$ 代表已知的 ζ 函数在临界线 $\text{Re } z = 1/2$ 上的单零点, 这些零点在 te Riele[28] 中已经列表给出. 利用变量替换 $z = -x^2$, 可以得到 $\{z_j(0) = -4t_j^2\}_{j=0}^{15,000}$ 是 $F_0(z)$ 的零点. 于是 $F_0(z)$ 的某些对零点是很靠近的. 其中有一对这种零点是简单零点, 我们集中注意于这对零点, 它们是

$$z_{34}(0) = -49,310.231 \dots \text{ 和 } z_{35}(0) = -50,063.757 \dots \quad (6.5)$$

由公式 (6.3) 可以确定

$$\left. \frac{dz_{34}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = +877.836 \dots \text{ 和 } \left. \frac{dz_{35}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -26.627 \dots, \quad (6.6)$$

因为 (6.6) 式中两个导数的符号不一样, 这意味着当 λ 从零减小时, 这两个零点彼此靠近, 也就是这两个零点彼此吸引.

对 $F_\lambda(z)$ 零点对的追踪产生了某种有趣的几何结果. 在图 3.1 中, 我们画出了 21 个零点对.

$$\{z_{34}(-[0.04]j) \text{ 和 } z_{35}(-[0.04]j)\}_{j=0}^{20}.$$

我们看到零点 $z_{34}(\lambda)$ 和 $z_{35}(\lambda)$ 是从实零点开始互相靠近最终在 $\lambda = 0.38$ 处相遇形成 $F_\lambda(z)$ 的一个二重零点, 然后这些零点分叉为一对共轭复零

点对,并在复平面内沿一条抛物线似的轨迹运动.从图 3.1 我们还看到,当 $\lambda \leq -0.40$ 时点对 $z_{34}(\lambda)$ 和 $z_{35}(\lambda)$ 成为 $F_\lambda(z)$ 的两个非实零点.对于这些 λ 值, $F_\lambda(z)$ 不可能是 $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ 的元素,并从 (4.11) 得出 -0.40 是 de Bruijn-Newman 常数 Λ 的一个下界.实际上,利用引理 9 经过稍长一点的分析,可以保证一个更好一点的下界. Varga, Norfolk 和 Ruttan[33] 中的结果为

定理 10([33]) 如果 Λ 是 de Bruijn-Newman 常数,那么

$$-0.385 < \Lambda.$$

上述确定 de Bruijn-Newman 常数下界的方法有一个相当大的缺点,因为它要高精度地追踪 (6.1) 式中实整函数的非实零点.显然,利用高精度算法只进行实数运算肯定是比较简单的.最近在 Csordas, Ruttan, 和 Varga[34] 中找到一种只用实运算确定 Λ 下界的新方法.它的想法很简单.对于 (4.3) 中的实整函数 $H_\lambda(x)$,不难看出,类似于 (4.11) 的下述两式成立

$$\begin{cases} H_\lambda \in \mathcal{L}-\mathcal{P} & \text{当 } \lambda \geq \Lambda \text{ 且} \\ H_\lambda \notin \mathcal{L}-\mathcal{P} & \text{当 } \lambda < \Lambda. \end{cases} \quad (6.8)$$

因此对于任何 $\lambda \geq \Lambda$,从 (6.8) 和当 $\rho = 0$ 时的定理 2 (2.11) 式必可得出

$$L_1(H_\lambda(x)) = (H'_\lambda(x))^2 - H_\lambda(x) \cdot H''_\lambda(x) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (6.9)$$

因而,如果能找到实 $\hat{\lambda}$ 和 X 使得 $L_1(H_{\hat{\lambda}}(X)) < 0$,那么 $\hat{\lambda}$ 就自动地成为 Λ 的一个下界,即

$$\hat{\lambda} < \Lambda.$$

从 (6.9) 式我们可知,计算 $L_1(H_\lambda(x))$ 只需高精度计算实积分,该积分由 (4.3) 式给出,即

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{\lambda t^2} \phi(t) \cos(xt) dt - \int_0^\infty t e^{\lambda t^2} \phi(t) \sin(xt) dt \text{ 和} \\ & - \int_0^\infty t^2 e^{\lambda t^2} \phi(t) \cos(xt) dt. \end{aligned}$$

利用这个办法,通过高精度实计算已经严格地得到了定理 10 的如下改进.

定理 11([34]) 如果 Λ 是 de Bruijn-Newman 常数, 那么

$$-0.0991 < \Lambda. \quad (6.10)$$

3.7 Riemann 假设的必要充分条件

我们讨论某些使 Riemann 假设成立的已知的充分必要条件来结束本章. 我们先叙述基本上属于 Jensen[16] 的已知结果 (此结果的全部证明请见 Csordas 和 Varga[8]).

定理 12(Jensen[16]) 令

$$f(z) = e^{-\alpha z^2} f_1(z) \quad (\alpha \geq 0, f(z) \not\equiv 0), \quad (7.1)$$

其中 f_1 是一个零或 1 类的实整函数, 那么当且仅当

$$|f'(z)|^2 \geq \operatorname{Re}\{f(z)\bar{f}''(z)\} \quad (\text{所有 } z \in \mathbb{C}) \quad (7.2)$$

时, $f \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$.

从 (2.6) 和 (4.3) 式中 $\lambda = 0$ 的情况, 我们有

$$H_0(x) = \xi(x/2)/8 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{ixt} dt, \quad (7.3)$$

其中 $\phi(t)$ 有 (2.5) 中的性质. 正如我们已知的, 当且仅当 $H_0(x)$ 的零点都是实的 Riemann 假设才为真, 它也等价于 $H_0 \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. 直接应用条件 (7.2) 到 (7.3) 中的函数 $H_0(z)$. 这就得到一个二重积分. 我们有下述已知的 Jensen 结果 (未发表的), 它源自 Pólya[25].

定理 13(Pólya[25]) Riemann 假设成立的充分必要条件是

$$\Delta(x, y) \geq 0, \quad \text{对所有 } x, y \in \mathbb{R}, \quad (7.4)$$

其中

$$\Delta(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(s) e^{i(t+s)x} e^{(t-s)y} (t-s)^2 dt ds. \quad (7.5)$$

从对称性考虑 (见 (2.5iii)), 仅对 $x, y \geq 0$ 计算 (7.5) 中的 $\Delta(x, y)$ 就足够了. 即使作了这种简化, 利用数值积分检查条件 (7.4) 中 $\Delta(x, y) \geq$

0 也是很可怕的. 然而, 在 Csordas 和 Varga[8] 中利用推广的 Hermite-Biehler 定理, 所得出的最近结果进一步减小了要求 $\Delta(x, y)$ 为正的区域.

定理 14 ([8]) Riemann 假设成立的一个充分必要条件是

$$\Delta(x, y) \geq 0 \quad \text{对于 } 0 < x < \infty \text{ 和 } 0 \leq y < 1. \quad (7.6)$$

其它和二重积分有关的 Riemman 猜测成立的充要条件可以在 Pólya[25], Csordas 和 Varga[9] 以及最近的 Csordas, Smith 和 Varga[35] 中找到. 例如在最后一篇文献中, 条件 (7.6) 进一步被弱化为

$$\Delta(x, y) > 0 \quad \text{对于 } x > 10^9 \text{ 和 } 0 < y < 1.$$

参考文献

- [1] R.P.Boas, Entire Functions, Academic Press, Inc., New York, 1954.
- [2] N.G.de Bruijn, *The roots of trigonometric integrals*, Duke J. Math. **17** (1950), 197-226.
- [3] J.B.Conrey, *At least two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, Bull. Amer. Math. Soc. **20**(1989), 79-81.
- [4] G.Csordas, T.S.Norfolk, and R.S. Varga, *The Riemann Hypothesis and the Turán inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **296**(1986), 521-541.
- [5] —, unpublished manuscript.
- [6] —, *A lower bound for the de Bruijn-Newman constant Λ* , Numer. Math. **52**(1988), 483-497.
- [7] G. Csordas and R.S. Varga, *Moment inequalities and the Riemann Hypothesis*, Constr. Approx. **4**(1988), 175-198.
- [8] —, *Fourier transforms and the Hermite-Biehler Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **107**(1989), 645-652.
- [9] —, *Necessary and sufficient conditions and the Riemann Hypothesis*, Adv. in Appl. Math. **11**(1990), 328-357.

- [10] E.Grosswald, *Generalization of a formula of Hayman, and its applications to the study of Riemann's zeta function*, Illinois J. Math. **10** (1966), 9-23.
- [11] —, *Correction and completion of the paper "Generalization of a formula of Hayman"*, Illinois J. Math. **13**(1969), 276-280.
- [12] G.H.Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C.R. Acad. Sci. Paris **158**(1914), 1012-1014.
- [13] W.K.Hayman, *A generalization of Stirling's formula*, J. Reine Angew. Math. **196**(1956), 67-95.
- [14] P.Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [15] —, *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [16] J.L.W.V.Jensen, *Recherches sur la théorie des équations*, Acta Math. **36**(1913), 181-195.
- [17] E.Laguerre, *Oeuvres*, Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [18] N.Levinson, *More than one third of the zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$* , Adv. in Math. **13**(1974), 383-436.
- [19] J. van de Lune, H.J.J. te Riele, and D.T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip. IV*, Math. Comp. **46**(1986), 667-681.
- [20] Yu.V.Matijasevich, *Yet another machine experiment in support of Riemann's conjecture*, Kibernetika (1982). (Russian, with English summary). Translated in Cybernetics **18**(1983), 705-707.
- [21] C.M. Newman, *Fourier transforms with only real zeros*, Proc. Amer. Math. Soc. **61**(1976), 245-251.
- [22] A.M.Odlyzko, *The 10^{20} -th zero of the Riemann zeta function and its neighbors*, preprint, 1989.
- [23] A.M.Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press, Inc., New York, 1960.
- [24] G. Pólya, *On the zeros of certain trigonometric integrals*, J. London Math. Soc. **1**(1926), 98-99.

- [25] —, *Über die algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen von J.L.W.V. Jensen*, Kgl. Danske Vid. Sel. Math. -Fys. Medd. **7**(1927), 3–33.
- [26] —, *Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen*, J. Reine Angew. Math. **158**(1927), 6–18.
- [27] G.Pólya and J.Schur, *Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen*, J.Reine Angew. Math. **144**(1914), 89–113.
- [28] H.J.J. te Riele, *Table of the First 15,000 Zeros of the Riemann Zeta Function to 28 Significant Digits and Related Quantities*, Report Number 67/79 of the Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.
- [29] H. te Riele, *A new lower bound for the de Bruijn-Newman constant*, Numer. Math. **58**(1991), 661–667.
- [30] B.Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsh. der Berliner Akad., (1858/60), 671–680. Also in *Gesammelte Mathematische Werke*, 2nd edition, Teubner, Leipzig, 1982, No. VII, 145–153.
- [31] J. Stoer and R.Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.
- [32] E.C.Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd Edition (revised by D.R. Heath-Brown), Oxford University Press, Oxford, 1986.
- [33] R.S. Varga, T.S.Norfolk, and A. Ruttan, *A lower bound for the de Bruijn-Newman constant. II*. Conference Proceedings, US-USSR Conference on Approximation Theory, Tampa, 1990, to appear.
- [34] G.Csordas, R.Ruttan, and R.S. Varga, *The Laguerre inequalities with applications to a problem associated with the Riemann Hypothesis*, Numerical Algorithms **1**(1991), 305–330.
- [35] G.Csordas, W.Smith, and R.S. Varga, *Level sets of real entire functions and the Laguerre inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc., submitted.

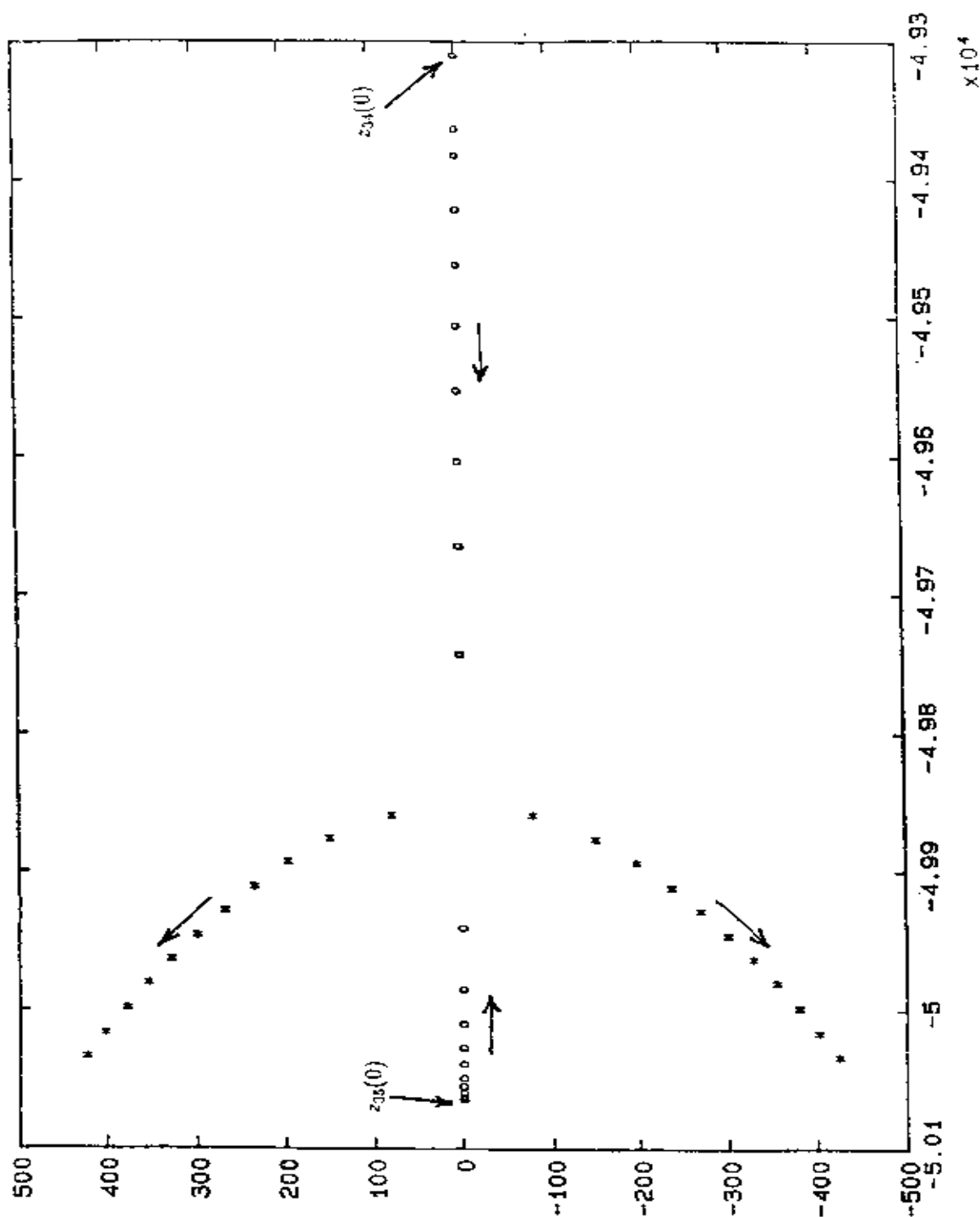


图 3.1 $\{z_{34}(-[0.04]j)\}_{j=0}^{20}$ 和 $\{z_{35}(-[0.04]j)\}_{j=0}^{20}$

第四章 $\exp(z)$ 部分和零点的渐近性

4.1 Szegő 定理和 D_∞ 及 D_n 曲线

用 $S_n(z) := \sum_{j=0}^n z^j/j!$ ($n \geq 1$) 代表熟知的指数函数 e^z 的部分和, 这里我们研究正规化部分 $S_n(nz)$ 零点的位置和这些零点趋向于 Szegő 曲线 D_∞ 的速度, D_∞ 定义为

$$D_\infty := \{z \in \mathbb{C} : |ze^{1-z}| = 1 \text{ 且 } |z| \leq 1\}. \quad (1.1)$$

回顾一下著名的 Eneström-Kakeya 定理 (见 Marden [7, p.137, 练习 2]), 它断言, 对任何一个多项式 $p_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, 且 $a_j > 0$ ($0 \leq j \leq n$), 它的全部零点一定落在闭环

$$\min_{0 \leq i < n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right) \leq |z| \leq \max_{0 \leq i < n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right)$$

之上. 把上式中的后一个不等式用于 e^z 的部分和 $S_n(z)$, 立刻可以看出, 对于每一个 $n \geq 1$, $S_n(z)$ 的全部零点都在 $|z| \leq n$ 之上. Eneström-Kakeya 定理的一个更精确的形式 (见 Anderson, Saff, 和 Varga [1, 推论 2]) 指出, 实际上, 对于任何 $n > 1$ $S_n(z)$ 的所有零点满足 $|z| < n$. 因此, 如果 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 是正规化部分和 $S_n(nz)$ 的零点集, 那么对于每个 $n \geq 1$ 这些零点落在闭单位圆盘 $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 之上, 且对每个 $n > 1$, 它们落在 Δ 的内部 (从图 4.1 可以清楚地看出这一点). 最终, 全体正规化部分和 $\{S_n(nz)\}_{n=1}^\infty$ 所有零点的无穷集在紧集 Δ 上至少有一个聚点.

1924 年 Szegő 在他的一篇杰出论文 [12] 中建立了如下定理:

定理 1 (Szegő [12]) e^z 的正规化部分和 $\{S_n(nz)\}_{n=1}^\infty$ 零点在 Δ 内的任一聚点 z 必在 (1.1) 中的曲线 D_∞ 上. 反之, D_∞ 上的每个点都是 e^z 的正规化部分和零点的聚点.

后来, Buckholtz^[2] 证明了, 对每个 $n \geq 1$, $S_n(nz)$ 的零点都在 D_∞ 之外, 为了说明这个结果, 我们在图 4.2 中画出了 $S_{16}(16z)$ 的十六个零点 (零点由 \times 代表) 以及 Szegő 曲线 D_∞ 和 $\partial\Delta$, 也就是 Δ 的边界. 对于 $S_{27}(27z)$ 的同样内容画在图 4.3 中.

图 4.1, 4.2 和 4.3 表明 $S_n(nz)$ 的零点看起来以“正规的”方式收敛到曲线 D_∞ , 从这些图还看出在 D_∞ 上点 $z = 1$ 的邻域内收敛得似乎最慢. 因为, 我们对测量这些零点收敛到曲线 D_∞ 最慢的收敛速率感兴趣, 令 $\text{dist}[z; B] := \inf\{|z - w| : W \in B\}$ 代表复平面内在点和集合 B 之间通常的 (度量) 距离, 并对有限点集 $\{t_j\}_{j=1}^n$ 我们定义

$$\text{dist}\{\{t_j\}_{j=1}^m; B\} := \max_{1 \leq j \leq m} (\text{dist}[t_j; B]). \quad (1.2)$$

Buckholtz^[2] 建立了如下结果: $S_n(nz)$ 的全部零点与 D_∞ 的距离都在 $\frac{2e}{\sqrt{n}}$ 之内, 即, 用 (1.2) 的记号表示时

$$\text{dist}[\{z_{k,n}\}_{k=1}^n; D_\infty] \leq \frac{2e}{\sqrt{n}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

这当然包含了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n} \cdot \text{dist}[\{z_{k,n}\}_{k=1}^n; D_\infty]\} \leq 2e = 5.43656 \dots. \quad (1.3')$$

文献中尚未考虑过是否, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, (1.3) 中的上界是 n 的最好可能的函数. 根据 Newman 和 Rivlin [8] 及 Saff 和 Varga [10] 的结果, 不难导出, (1.3) 中的上界作为 n 的函数实际上是最好可能的. 更精确地说, 从 Carpenter, Varga 和 Waldvogel [4] 的结果, 我们有下列结论 (在 §4.2 中给出其证明):

命题 2 ([4]) 若 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 代表 $S_n(nz)$ 的零点且 t_1 代表 (见 (2.2)) $\text{erfc}(w) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_w^\infty e^{-t^2} dt$ 最靠近原点的零点, 且满足 $\text{Im } t_1 > 0$, 那么 (1.3) 给出的结果作为 n 的函数, 是最好可能的, 也就是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n} \text{dist}[\{z_{k,n}\}_{k=1}^n; D_\infty]\} \geq (\text{Im } t_1 + \text{Re } t_1) = 0.63665 \dots. \quad (1.4)$$

检查图 4.2 和 4.3, 我们注意到, 和 $z = 1$ 一致地保持一定距离的零点 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 好像收敛 (到曲线 D_∞) 得比较快. 事实上, 利用围绕点 $z = 1$ 的开圆盘

$$C_\delta := \{z \in \mathcal{C} : |z - 1| < \delta\} \quad (0 < \delta \leq 1), \quad (1.5)$$

排除在 $z = 1$ 附近的 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 中的点, 这种看出来的较快的收敛性可以量化, 更准确地说, 我们在 §4.2 中将要证明如下新的结果:

定理 3 ([4]) 如果 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 代表正规化部分和 $S_n(nz)$ 的零点, 且对任一个固定的数 $0 < \delta \leq 1$, 那么

$$\text{dist} [\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta; D_\infty] = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.6)$$

此外, (1.6) 中的界 $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ 作为 n 的函数在下述意义下是最好可能的, 即对于任何 $0 < \delta \leq 1$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{\log n} \cdot \text{dist} [\{t_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta; D_\infty] \right\} \geq 0.108900 > 0. \quad (1.6')$$

在图 4.2 和 4.3 中 $S_n(nz)$ 的零点看上去“正规的”分布方式表明在单位圆盘 Δ 中可能存在有一个光滑的弧 D_n (依赖于 n), 它比曲线 D_∞ 更靠近零点 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$. 正如 Szegő 论文 [12] 提出的那样, 我们设, 对每个 $n \geq 1$,

$$D_n := \left\{ z \in \mathbb{C} : |ze^{1-z}|^n = \tau_n \sqrt{2\pi n} \left| \frac{1-z}{z} \right|, |z| \leq 1, \right. \\ \left. \text{和 } |\arg z| \geq \cos^{-1} \left(\frac{n-2}{n} \right) \right\}, \quad (1.7)$$

从 Stirling 公式 (见 Henrici[6, p.377]) 得知

$$\tau_n := \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} \approx 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + \cdots \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.8)$$

我们还要提及 $\log \tau_n$ 可以借助于 Benit 函数 $J(z)$ 表示出来, 并有如下渐近级数表达式 (见 [6, p.359]):

$$\log \tau_n = J(n) \approx \frac{n^{-1}}{12} - \frac{n^{-3}}{360} + \frac{n^{-5}}{1260} - \frac{n^{-7}}{1680} + \frac{n^{-9}}{1188} \cdots \quad (n \rightarrow \infty).$$

进而, 可以证明 (1.7) 中的弧 D_n (见 [4, 命题 3]) 是一个普通的曲线, 对于每一个正整数 n , 它落在闭单位圆盘 Δ 内. 很有意思的是, 对于每个 n , 弧 D_n 对原点来说是个星形曲线, 也就是说, 对每个固定的实数 θ , 满足 $|\theta| \geq \cos^{-1} \left(\frac{n-2}{n} \right)$ 射线 $\{z = re^{i\theta} : r \geq 0\}$ 交 D_n 于唯一的点.

我们还要提到在 (1.7) 中 D_n 的定义中限制 $|\arg z| \geq \cos^{-1} \left(\frac{n-2}{n} \right)$

是源于 $S_n(nz)$ 的零点全在扇形区 $|\arg z| \geq \cos^{-1} \left(\frac{n-2}{n} \right)$ 之内 (见 Saff 和 Varga [9]).

用 (1.7) 中的弧 D_n , 我们提出下面的新结果, 并在 §4.3 中给出它的证明.

定理 4 ([4]) 如果 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 是正规化部分和 $S_n(nz)$ 的零点, 且 $0 < \delta \leq 1$ 为一固定数, 那么

$$\text{dist}[\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta; D_n] = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.9)$$

此外, (1.9) 中的界 $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 在下述意义上是 n 的最好可能的函数, 即对于任何 $0 < \delta \leq 1$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^2 \cdot \text{dist}[\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta; D_n]\} \geq 0.13326 > 0. \quad (1.9')$$

为了说明定理 4 的结果, 在图 4.4 中, 我们沿着曲线 D_{16} 画出了 $S_{16}(16z)$ 的 16 个零点. 在图 4.5 中, 我们同样沿着曲线 D_{27} 画出 $S_{27}(27z)$ 的 27 个零点. 在画图的精度上, 看来 $S_{16}(16z)$ 和 $S_{27}(27z)$ 的零点分别落在 D_{16} 和 D_{27} 之上!

4.2 命题 2 和定理 3 的证明

我们从证明命题 2 开始.

命题 2 的证明, 正如 Newman 和 Rivlin[3] 中的证明一样, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在复平面上半平面上任何一个紧集中 (即, $\text{Im } w \geq 0$), 我们有

$$\left\{ \frac{S_n(n + \sqrt{2nw})}{e^{n + \sqrt{2nw}}} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{一致收敛到} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_w^{\infty} e^{-t^2} dt =: \frac{1}{2} \text{erfc}(w).$$

如果 t_1 是 $\text{erfc}(w)$ 在上半平面上最靠近原点的零点, 那么, 从数值上可以知道 (见 Fettis, Caslin 和 Cramer [5])

$$t_1 = -1.35481 \dots + i1.99146 \dots. \quad (2.2)$$

又因为 $S_n(n + \sqrt{2nw})e^{-n - \sqrt{2nw}}$ 的零点是使得 $S_n(n + \sqrt{2nw})$ 为零的那些 w 的值, 所以, 利用 Herwitz 定理 (见 Titchmarsh [13, p. 119]), (2.1) 式中的一致收敛性蕴涵着对于充分大的 n , $S_n(n + \sqrt{2nw})$ 在以 t_1 为中心的任意小的闭圆盘中有 n 零点. 因而, 如 Saff 和 Varga[10] 中指出的, $S_n(n + \sqrt{2nw})$ 有形如

$$n + \sqrt{2n}(t_1 + O(1)) = n \left\{ 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}(t_1 + O(1)) \right\} \quad (n \rightarrow \infty)$$

的零点或等价地 $S_n(nz)$ 有形如

$$z_{1,n} = 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}(t_1 + O(1)) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.3)$$

的零点 $z_{1,n}$.

接下来, 如果 z 在 D_∞ 上且 $\operatorname{Re} z = 1 - \delta$, 其中 $\delta > 0$ 是个小数, 直接从 (1.1) 中 D_∞ 的定义可以得到 $(1 - \delta)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = e^{-2\delta}$, 于是

$$|\operatorname{Im} z| = \delta \left\{ 1 - \frac{2}{3}\delta + O(\delta^2) \right\} \quad (\delta \rightarrow 0). \quad (2.4)$$

注意 (2.4) 式表明, 在上半平面的曲线 D_∞ 通过 $z = 1$ 时, 它和实轴形成的角度为 $\pi/4$. (这可以从图 4.2 和 4.3 看出来). 从 (2.3) 和 (2.4) 出发, 计算表明 (见 Carpenter[3, p. 137]), 对于大的 n , $z_{1,n}$ 到曲线 D_∞ 的距离满足

$$\operatorname{dist}[z_{1,n}; D_\infty] = \frac{1}{\sqrt{n}} \{ \operatorname{Im} t_1 + \operatorname{Re}(t_1) + O(1) \} \quad (n \rightarrow \infty);$$

而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n} \operatorname{dist}[z_{1,n}; D_\infty] \} = \operatorname{Im} t_1 + \operatorname{Re} t_1 = 0.63665 \dots, \quad (2.5)$$

最后一个结果用到了 (2.2) 式中的数值估计. 但因为 $\operatorname{dist}[z_{1,n}; D_\infty] \leq \operatorname{dist}[\{z_{k,n}\}_{k=1}^n; D_\infty]$, 从 (1.2) 式我们得出所需的结果 (1.4). \square

为了证明 §4.1 中的定理 3, 我们需要如下的准备工作. 从定义

$S_n(z) := \sum_{j=0}^n z^j/j!$, 通过微分得到

$$e^{-z} S_n(z) = 1 - \frac{1}{n!} \int_0^z \zeta^n e^{-\zeta} d\zeta. \quad (2.6)$$

在上述表达式中用 $n\zeta$ 代替 ζ , 并用 nz 代替 z 就有

$$e^{-nz} S_n(nz) = 1 - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^z \zeta^n e^{-n\zeta} d\zeta. \quad (2.7)$$

把 (1.8) 里 τ_n 的定义用在 (2.7) 中就给出

$$e^{-nz} S_n(nz) = 1 - \frac{\sqrt{n}}{\tau_n \sqrt{2\pi}} \int_0^z (\zeta e^{1-\zeta})^n d\zeta. \quad (2.8)$$

从 Szegő [12] 可知, $w = \zeta e^{1-\zeta}$ 在 $|\zeta| < 1$ 内部是单叶的. (有关这个结论的证明, 见 Saff 和 Varga [11, 引理 (4.1) 当 $\sigma = 0$ 的特殊情况]. 因为我们只是对仅仅限于 $S_n(nz)$ 的零点感兴趣 (从 §4.1, 对于所有 $n > 1$ 它们都落在 $|z| < 1$ 之内), 所以在 (2.8) 中我们做个变量置换 $w = \zeta e^{1-\zeta}$ 就得出

$$e^{-nz} S_n(nz) = 1 - \frac{\sqrt{n}}{\tau_n \sqrt{2\pi}} \int_0^{ze^{1-z}} w^{n-1} \left(\frac{\zeta(w)}{1-\zeta(w)} \right) dw. \quad (2.9)$$

上面这个积分的形式使我们得出下面的结果, 这个结果也是受了 Szegő 论文 [12] 启发而得出的, 考虑积分

$$\int_0^A w^{n-1} G(w) dw, \quad (2.10)$$

这里积分路径取为连接 0 和 A 的复线段. 假设 $G(w)$ 在包含线段 $[0, A]$ 的一个开域上是解析的, 在 $w = A$ 上把 $G(w)$ 展开 Taylor 级数就给出

$$\int_0^A w^{n-1} G(w) dw = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{G^{(m)}(A)}{m!} \int_0^A w^{n-1} (w-A)^m dw. \quad (2.11)$$

因为上式和项中的第 m 项积分 (在变量置换后) 恰好是 β 函数 (见 [6, p.55]), 所以对每个 $m \geq 0$ 和 $n \geq 1$, 它满足

$$\frac{G^{(m)}(A)}{m!} \int_0^A w^{n-1} (w-A)^m dw = \frac{(-1)^m A^{m+n} G^{(m)}(A)}{\prod_{j=0}^m (n+j)}.$$

于是 (2.10) 中的积分可以表示为

$$\int_0^A w^{n-1} G(w) dw = A^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m A^m G^{(m)}(A)}{\prod_{j=0}^m (n+j)}. \quad (2.12)$$

设 $A := ze^{1-z}$, $F(\zeta) := \zeta/1-\zeta$ 以及 $G(w) := F(\zeta(w))$, 其中 $w := \zeta e^{1-\zeta}$, 我们就把积分 (2.9) 和 (2.10) 联系起来, 如果 z 是闭单位圆盘 Δ 中的任一个内点, 则定义的 $G(w)$ 在包含线段 $[0, ze^{1-z}]$ 的一个开域上是解析的, 并且 (2.12) 成立. 当 $0 \leq m \leq 4$ 时, 经对 $G^{(m)}(ze^{1-z})$ 的显式表达式的简短计算, 我们可以得出 (2.12) 式的前几项:

$$\begin{aligned} \int_0^{ze^{1-z}} w^{n-1} \left(\frac{\zeta(w)}{1-\zeta(w)} \right) dw &= \frac{z(ze^{1-z})^n}{n(1-z)} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)(1-z)^2} \right. \\ &+ \frac{z(4-z)}{(n+1)(n+2)(1-z)^4} - \frac{z^2(27-14z+2z^2)}{(n+1)(n+2)(n+3)(1-z)^6} \\ &+ \left. \frac{z^3(256-203z+58z^2-6z^3)}{\left(\prod_{j=1}^4 (n+j) \right) (1-z)^8} - \dots \right\} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.13)$$

估计 (2.11) 的部分 Taylor 级数的 Cauchy 余项, 并利用 (2.12) 式, 则有, 对于每个非负整数 N ,

$$\begin{aligned} \int_0^{ze^{1-z}} w^{n-1} \left(\frac{\zeta(w)}{1-\zeta(w)} \right) dw \\ &= (ze^{1-z})^n \sum_{m=0}^N \frac{(-1)^m (ze^{1-z})^m G^{(m)}(ze^{1-z})}{\prod_{j=0}^m (n+j)} + O\left(\frac{1}{n^{N+2}}\right) \\ &\quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.14)$$

在 $\Delta \setminus \{1\}$ 的任一紧集上一致成立 (这个结果当然又是受了 Szegő[12] 的启发, 他对于 $N=0$ 的情形导出了 (2.14)).

在 (2.14) 和 (2.13) 式中取 $N = 0$, 则我们有

$$\int_0^{ze^{1-z}} w^{n-1} \left(\frac{\zeta(w)}{1-\zeta(w)} \right) dw = \frac{z(ze^{1-z})^n}{n(1-z)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.15)$$

在 $\Delta \setminus \{1\}$ 的任一紧集上一致成立. 因此, 如果 z 是 e^z 的正规化部分和 $S_n(nz)$ 的零点, 那么从 (2.9) 和 (2.15) 我们有

$$1 - \frac{\sqrt{n}}{\tau_n \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{z(ze^{1-z})^n}{n(1-z)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} = 0$$

或等价地有

$$(ze^{1-z})^n = \tau_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{1-z}{z} \right) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.16)$$

在 $\Delta \setminus \{1\}$ 的任一紧集上一致成立.

现在我们可以证明定理 3 了.

定理 3 的证明: 从 Szegő[12], 可以得知 $w = ze^{1-z}$ 把 Szegő 曲线 D_∞ 的内部保角映射到 $|w| < 1$ 的内部, 并且它也把 D_∞ 上的点 $1-1$ 映射到 $|w| = 1$ 之上. 因此 z 从 $z = 1$ 出发按正方向沿 D_∞ 运动时, w 的幅角从 0 单调地增加到 2π . Szegő[12] 还指出, $S_n(nz)$ 的零点 (当 $n \rightarrow \infty$) 在映射 $w = ze^{1-z}$ 下渐近均匀分布在一个扇形区内. 更精确地说, 令 ϕ_1 和 ϕ_2 是任意两个实数, 且满足 $0 < \phi_1 < \phi_2 < 2\pi$, 而 z_1 和 z_2 分别为在映射 $w = ze^{1-z}$ 下 $w_1 = e^{i\phi_1}$ 和 $w_2 = e^{i\phi_2}$ 的原像. 于是 z_1 和 z_2 是 D_∞ 上的点, 且 $0 < \arg z_1 < \arg z_2 < 2\pi$, 令 S 是 z 平面上的一个扇形区, 定义为:

$$S = \{z \in \mathcal{C} : \arg z_1 \leq \arg z \leq \arg z_2\}.$$

Szegő[12] 指出, 若 σ_n 是 $S_n(nz)$ 在 S 中零点的个数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2\pi}.$$

这个结果蕴涵着, 对于大的 n 来说, $S_n(nz)$ 的零点大致上均匀分布在 w 平面上由映射 $w = ze^{1-z}$ 生成的一个扇形区内.

这可以用到下面证明中, 如果我们在 $|w| = 1$ 上取 n 个均匀分布的点 $\{\exp[i(2k-1)\pi/n]\}_{k=1}^n$, 令 $\{\bar{z}_{k,n}\}_{k=1}^n$ 是这些点在 z 平面上映射

$w = ze^{1-z}$ 的唯一原像, 即,

$$\tilde{z}_{k,n} e^{1-\tilde{z}_{k,n}} = \exp[i(2k-1)\pi/n] \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2.17)$$

据定义, 点 $\{\tilde{z}_{k,n}\}_{k=1}^n$ 在 D_∞ 上, 因此在图 4.6 中我们沿着 $S_{16}(16z)$ 的零点 $\{z_{k,16}\}_{k=1}^{16}$ 在 D_∞ 上用 * 画出了点 $\{\tilde{z}_{k,16}\}_{k=1}^{16}$, 同样, 在图 4.7 中我们沿 $S_{27}(27z)$ 的零点 $\{z_{k,27}\}_{k=1}^{27}$ 画出 $\{\tilde{z}_{k,27}\}_{k=1}^{27}$.

从 (2.17), 我们有

$$(\tilde{z}_{k,n} e^{1-\tilde{z}_{k,n}})^n = -1 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2.18)$$

把 $\tilde{z}_{k,n}$ 看做 $z_{k,n}$ 的近似值, 并把 $S_n(nz)$ 的零点 $z_{k,n}$ 写为 $z_{k,n} = \tilde{z}_{k,n} + \delta_{k,n}$, 并代入 (2.16) 式. 利用 (2.18) 式, 对 (2.16) 直接计算, 并取对数再除 n , 只要我们仅考虑 C_δ 外的那些零点, 就有

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{1}{\tilde{z}_{k,n}}\right)\delta_{k,n} + O(\delta_{k,n}^2) &= \frac{1}{n} \log \left\{ \tau_n \sqrt{2\pi n} \left(1 - \frac{1}{\tilde{z}_{k,n}}\right) \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{\delta_{k,n}}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

(这里 δ 是一个满足 $0 < \delta \leq 1$ 的固定数, C_δ 的定义由 (1.5) 给出, (2.19) 中的对数是它在 $\mathcal{D} \setminus [0, +\infty)$ 且满足 $\log(-1) = i\pi$ 的单值延拓).

对于集合 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$, 显然存在一个仅依赖于 δ 的常数 C_1 , 使得对于对应于 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$ 的所有点 $\{\tilde{z}_{k,n}\}$ 都有

$$0 < C_1 \leq \left|1 - \frac{1}{\tilde{z}_{k,n}}\right|,$$

于是从 (2.19) 我们推导出对于所有的 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$, 有

$$\delta_{k,n} = O\left(\frac{\log[\tau_n \sqrt{2\pi n}]}{n}\right) = O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.20)$$

但是因为 $\tilde{z}_{k,n}$ 不必是在 D_∞ 上最靠近 $z_{k,n}$ 的点, 所以对于所有的 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$ 中的点都有 $\text{dist}[z_{k,n}; D_\infty] \leq |\delta_{k,n}|$, 这就从 (2.20) 式得出了定理 3 中所需的结果 (1.6).

为了证明定理 3 中给出的结果 (1.6) 是 n 的最好可能的函数, 首先令 $n = 2m + 1$ 是任一个正奇数, 并令 $-\mu$ 代表 Szegő 曲线 D_∞ 的

负实点, 即 μ 是 $\mu e^{1+\mu} = 1$ 的唯一正实根, 数值上有 $\mu = 0.27846 \dots$. 从 (2.18) 我们看到

$$\tilde{z}_{m+1, 2m+1} = -\mu = -0.27846 \dots (m = 0, 1, \dots). \quad (2.21)$$

并同样可以得出 $z_{m+1, 2m+1}$ 是奇次多项式 $S_{2m+1}((2m+1)z)$ 的唯一实(负)零点. 利用 (2.21), 从 (2.19) 得出

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2m+1}{\log(2m+1)} \right) \delta_{m+1, 2m+1} \right\} = -\frac{1}{2(1 + \frac{1}{\mu})} = -0.10890 \dots \quad (2.22)$$

因为 $z_{m+1, 2m+1}$ 在曲线 D_∞ 之外, 并注意 $\delta_{m+1, 2m+1} < 0$, 且 $-\delta_{m+1, 2m+1} \cdot \text{dist}[z_{m+1, 2m+1}; D_\infty]$, 和对任何 $0 < \delta \leq 1$ $z_{m+1, 2m+1}$ 落在 C_δ 之外, 于是 (2.22) 变成

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2m+1}{\log(2m+1)} \right) \cdot \text{dist}[z_{m+1, 2m+1}; D_\infty] \right\} \\ = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{\mu})} = 0.10890 \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

但因为 $\text{dist}[z_{m+1, 2m+1}; D_\infty] \leq \text{dist}[\{z_{k, 2m+1}\}_{k=1}^{2m+1} \setminus C_\delta; D_\infty]$, 所以从 (2.23) 可知

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2m+1}{\log(2m+1)} \right) \cdot \text{dist}[\{z_{k, 2m+1}\}_{k=1}^{2m+1} \setminus C_\delta; D_\infty] \right\} \\ \geq \frac{1}{2(1 + 1/\mu)} = 0.10890 \dots > 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

对于 $n = 2m$ 是正偶数的情形可以类似于 (2.23) 式得出

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2m}{\log(2m)} \cdot \text{dist}[z_{m, 2m}; D_\infty] \right\} = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{\mu})} = 0.10890 \dots \quad (2.25)$$

因此 (见 (2.24))

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2m}{\log(2m)} \cdot \text{dist}[\{z_{k, 2m}\}_{k=1}^{2m} \setminus C_\delta; D_\infty] \right\} \geq \frac{1}{2(1 + \frac{1}{\mu})} > 0. \quad (2.26)$$

联立 (2.24) 和 (2.25) 得出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{\log n} \cdot \text{dist} [\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta; D_\infty] \right\} \geq 0.10890 \cdots > 0, \quad (2.27)$$

这就是定理 3 中所要证的结果 (1.6').

4.3 定理 4 的证明

在 (2.16) 中, 对于在 $\Delta \setminus \{1\}$ 中任何一个紧集上 $S_n(nz)$ 的零点 z , 我们已经证明了, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 (2.16) 一致成立. 取 (2.16) 式中第 n 个根的模, 下述事实就变得十分清楚了, 即, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 (1.1) 中的 Szegő 曲线 D_∞ 就逐渐成为 $\{S_n(nz)\}_{n=1}^\infty$ 的零点渐近地聚集起来唯一可能的地方. 正如从命题 2 中得知的, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $S_n(nz)$ 的零点到 D_∞ 曲线的最大距离为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 在 $\Delta \setminus \{1\}$ 的紧子集上这个距离由定理 3 改进为 $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$.

但是自然要问是否有一种定义一个依赖于 n 的弧 D_n 的方法, 使得 $S_n(nz)$ 的零点靠近 D_n 的程度比靠近 D_∞ 的程度好得多. 当然通过 $S_n(nz)$ 零点 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 的曲线将肯定地回答这个问题. 然而当不明显地知道 $S_n(nz)$ 零点的情况下, 也可能定义这样的弧 D_n . 事实上, 我们忽略 (2.16) 中的 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 项并全都取模, 就得到了 (1.7) 式中的 D_n 的定义.

现在我们可以证明定理 4.

定理 4 的证明: 对于任何固定的 $0 < \delta \leq 1$. 我们考虑集合 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$, 其中 C_δ 的定义在 (1.5) 中而 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 依然是 $S_n(nz)$ 的零点, 那么对于任何 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$ 中的零点 $z_{k,n}$ (2.16) 成立, 即,

$$(ze^{1-z})^n = \tau_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{1-z}{z} \right) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \quad (n \rightarrow \infty), \quad (3.1)$$

其中隐含在 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 中的常数只依赖于 δ . 另一方面, 从我们关于弧 D_n 的说明, 对任何 $n \geq 1$ 和满足 $\theta_n \leq \theta \leq 2\pi - \theta_n$ 的 θ 值, 其中 $\theta_n := \cos^{-1}\left(\frac{n-2}{n}\right)$ 我们都有在 $(0, 1)$ 中存在唯一的 $r_n(\theta)$, 使得 $z = r_n(\theta)e^{i\theta}$ 在曲线 D_n 上. 再由 (1.7) 式, 这就包含着, 存在实数

$\Psi(n, \theta)$ 使得

$$\frac{z(ze^{1-z})^n}{\tau_n \sqrt{2\pi n}(1-z)} = e^{i\Psi(n, \theta)}, \quad (3.2)$$

其中对于所有的 $\theta_n \leq \theta \leq 2\pi - \theta_n$ 都有

$$\Psi(n, \theta) = n[\theta - r_n(\theta) \sin \theta] + \theta + \tan^{-1} \left[\frac{r_n(\theta) \sin \theta}{1 - r_n(\theta) \cos \theta} \right], \quad (3.3)$$

而且 $\Psi(n, \theta)$ 在 $[\theta_n, 2\pi - \theta_n]$ 上是 θ 的严格增函数并在 $(\theta_n, 2\pi - \theta_n)$ 内正好有 n 个不同的 θ 值满足 $\Psi(n, \theta) \equiv 0 \pmod{2\pi}$. 如果我们用 $\{\hat{z}_{k,n}\}_{k=1}^n$ 代表 D_n 上这 n 个特定的点, 从 (3.2) 可得出

$$(\hat{z}_{k,n} e^{1-\hat{z}_{k,n}})^n = \tau_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{1 - \hat{z}_{k,n}}{\hat{z}_{k,n}} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

记住 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 是 $S_n(nz)$ 的零点集, 把 $z_{k,n}$ 表示为 $z_{k,n} = \hat{z}_{k,n} + \delta_{k,n}$, 对于在 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$ 内的任一零点 $z_{k,n}$ 从 (3.1) 式我们有

$$(z_{k,n} e^{1-z_{k,n}})^n = \tau_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{1 - z_{k,n}}{z_{k,n}} \right) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}. \quad (3.5)$$

用 $\hat{z}_{k,n} + \delta_{k,n}$ 代替 (3.5) 式中的 $z_{k,n}$ 并利用 (3.4) 取对数然后被 n 除之后, 当 $n \rightarrow \infty$ 时这就化成

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{\delta_{k,n}}{\hat{z}_{k,n}} \right) - \delta_{k,n} &= \frac{1}{n} \log \left(1 - \frac{\delta_{k,n}}{1 - \hat{z}_{k,n}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{n} \log \left(1 + \frac{\delta_{k,n}}{\hat{z}_{k,n}} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

展开其中的各项, (并假设 $\delta_{k,n}$ 充分地小) 很容易断定, 对于所有 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$ 中的点都有

$$\delta_{k,n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.7)$$

又因为 $\hat{z}_{k,n}$ 不必是 D_n 中最靠近 $z_{k,n}$ 的点, 那么对 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta$ 中的所有点都有 $\text{dist}[z_{k,n}; D_n] \leq |\delta_{k,n}|$. 这就得到了定理 4 中所要的结果 (1.9).

最后为了表明 (3.7) 的结果作为 n 的函数是最好可能的结果, 只考虑 (和 §4.2 中一样) $S_n(nz)$ 零点的特殊序列 $\{z_{m+1, 2m+1}\}_{m=1}^\infty$ 和

$\{z_{m,2m}\}_{m=1}^{\infty}$ 就足够了. 记住 (2.21) 中的数值 μ , 以和证明定理 3 同样的方式, 可以证明, 对任何 $0 < \varepsilon \leq 1$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n^2 \cdot \text{dist} [\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \setminus C_\delta; D_n]\} \geq \frac{\mu}{(1+\mu)^3} = 0.13326 \dots \quad (3.8)$$

这就是 (1.9') 中所希望的最好结果. \square

最后, 考虑闭集

$$\begin{aligned} D_n := \{z \in \mathcal{C} : |ze^{1-z}|^n \leq \tau_n \sqrt{2\pi n} |1-z|/|z|, \quad |z| \leq 1, \\ |\arg z| \geq \cos^{-1}((n-z)/n)\} \quad (n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.9)$$

其边界是由 (1.7) 中弧 D_n 和从零点射出的两个线段构成的. 图 4.8 画出了 D_{27} , 我们要说明的是 D_n 显然对于原点是星形的图形.

由于 $S_n(nz)$ 的零点 $\{z_{k,n}\}_{k=1}^n$ 都不在 Szegö 曲线 D_∞ 之上. 自然要问是否对每个 $n \geq 1$ $S_n(nz)$ 的零点也都不在 D_n 之上. 遗憾的是, 图 4.4 和 4.5 缺少足够的细节能使我们猜出这个问题的答案. 实际上根据高精度计算 (有 120 位有效数字) 和某些渐近分析, 可以叙述下面两个结果:

i) 存在有一个最小的整数 n_0 使得对于所有的正整数 $n > n_0$ 有

$$\{z_{k,n}\}_{k=1}^n \cap D_n \neq \emptyset; \quad (3.10)$$

而对于 $n = 1, 2, \dots, 96$, 有

$$\text{ii) } \{z_{k,n}\}_{k=1}^n \cap D_n = \emptyset;$$

看来 $n_0 = 96$, 可以在 [14] 中找到这些结果.

参考文献

- [1] N. Anderson, E.B. Saff, and R.S. Varga, *On the Eneström-Kakeya Theorem and its sharpness*, Linear Algebra Appl. **28** (1979), 5-16.
- [2] J.D. Buckholtz, *A characterization of the exponential series*, Amer. Math. Monthly **73**, Part II (1966) 121-123.
- [3] A.J. Carpenter, *Some theoretical and computational aspects of approximation theory*, Ph. D. dissertation, The University of Leeds, Leeds, England, 1988.

- [4] A.J. Carpenter, R.S. Varga, and J. Waldvogel, *Asymptotics for the zeros of the partial sums of e^z . I*, Rocky Mountain J. Math. **21** (1991), 99–120.
- [5] H.E. Fettis, J.C. Caslin, and K.R. Cramer, *Complex zeros of the error function and of the complementary error function*, Math. Comp. **27** (1973), 401–404.
- [6] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [7] M. Marden, Geometry of Polynomials, Mathematical Surveys No. 3, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.
- [8] D.J. Newman and T.J. Rivlin, *The zeros of the partial sums of the exponential function*, J. Approx. Theory **5** (1972), 405–412.
- [9] E.B. Saff and R.S. Varga, *On the zeros and poles of Padé approximants to e^z* , Numer. Math. **25** (1975), 1–14.
- [10] E.B. Saff and R.S. Varga, *Zero-free parabolic regions for sequences of polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **7** (1976), 344–357.
- [11] E.B. Saff and R.S. Varga, *On the zeros and poles of Padé approximants to e^z . III*, Numer. Math. **30** (1978), 241–266.
- [12] G. Szegő, *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **23** (1924), 50–64.
- [13] E.C. Titchmarsh, The Theory of Functions, 2nd edition, Oxford University Press, London, 1950.
- [14] R.S. Varga and A.J. Carpenter, *Asymptotics for the zeros of the partial sums of e^z . II*, Computational Methods and Function Theory, St. Ruscheweyh, E.B. Saff, L. Salinas, R.S. Varga, eds., Lecture Notes in Mathematics 1435, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990, pp. 201–207.

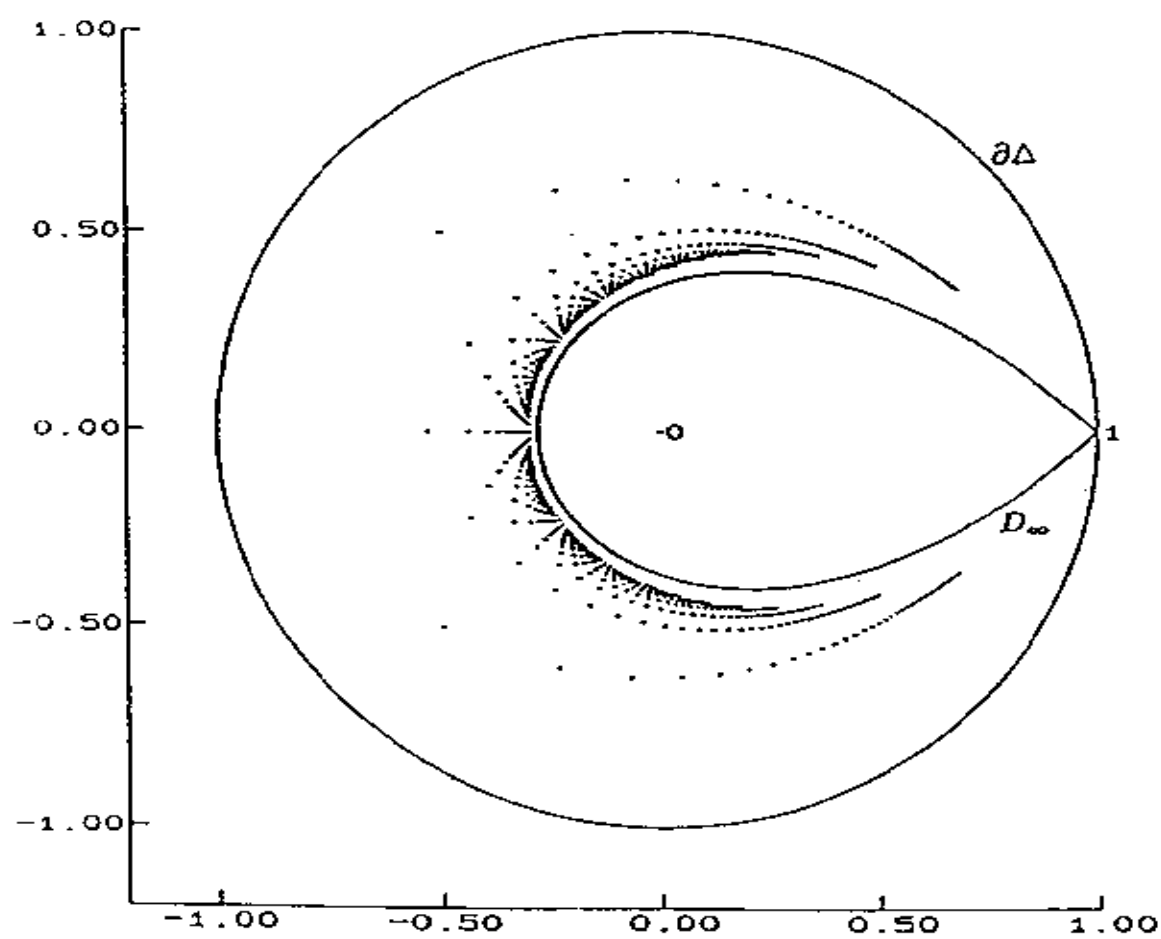


图 4.1 $\{S_n(nz)\}_{n=1}^{40}$ 的零点

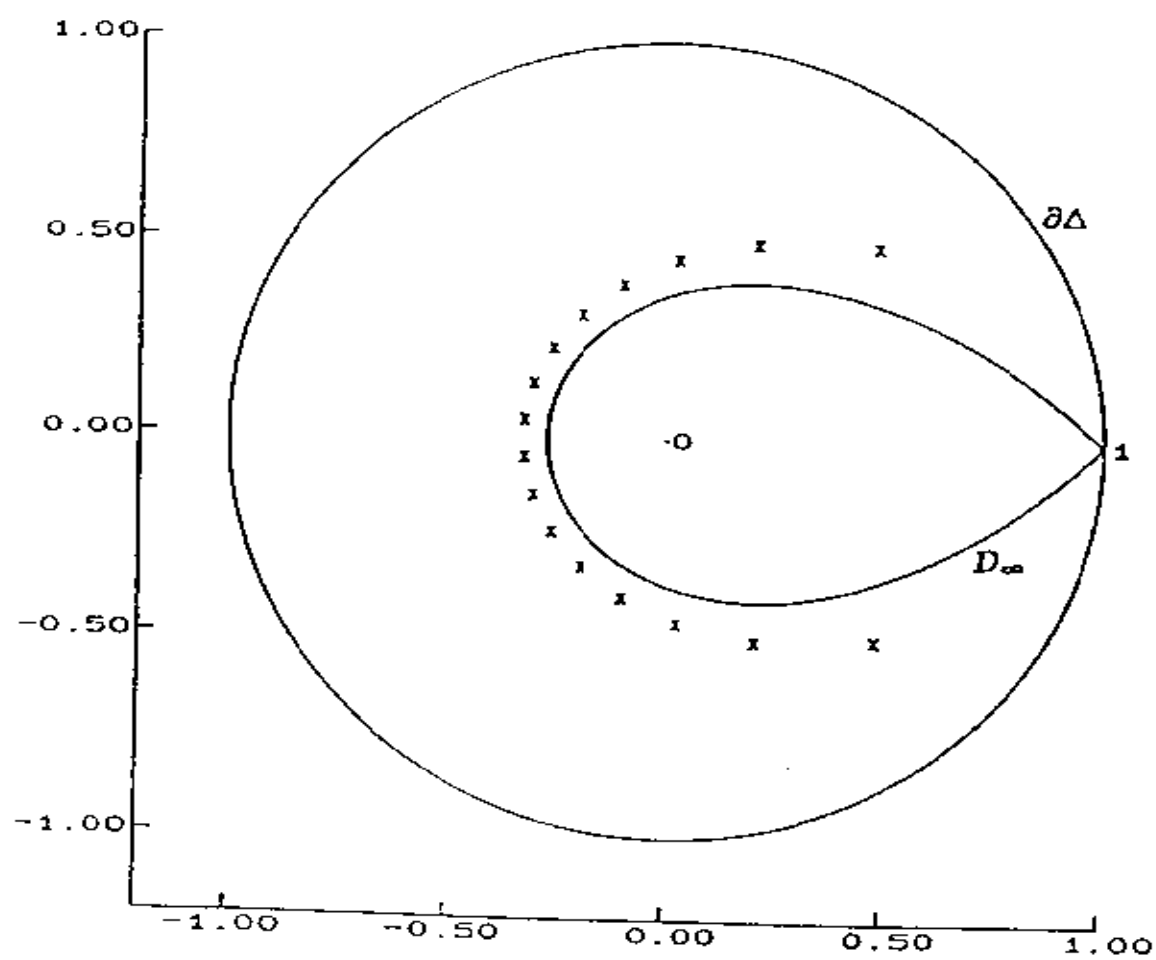


图 4.2 $\{S_{16}(16z)\}$ 的零点

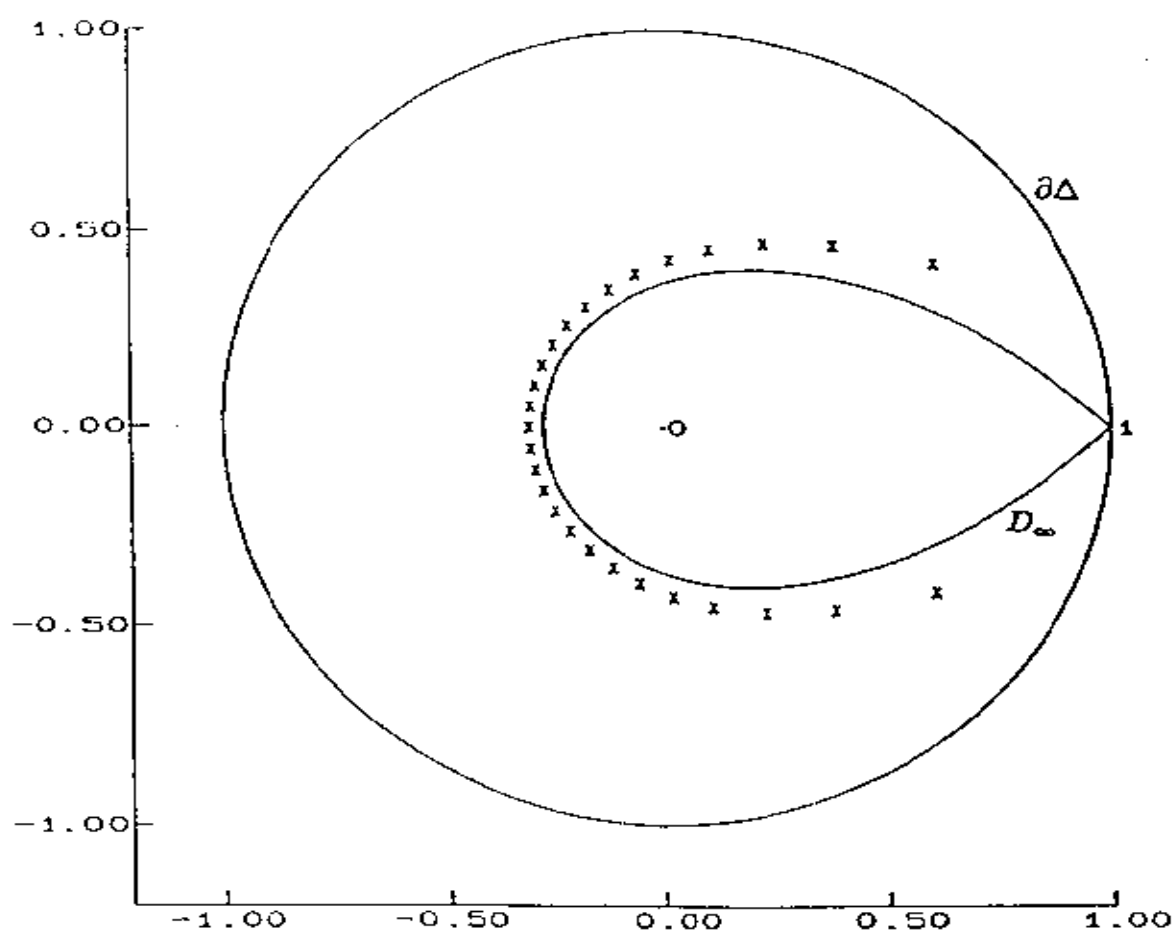


图 4.3 $\{S_{27}(27z)\}$ 的零点

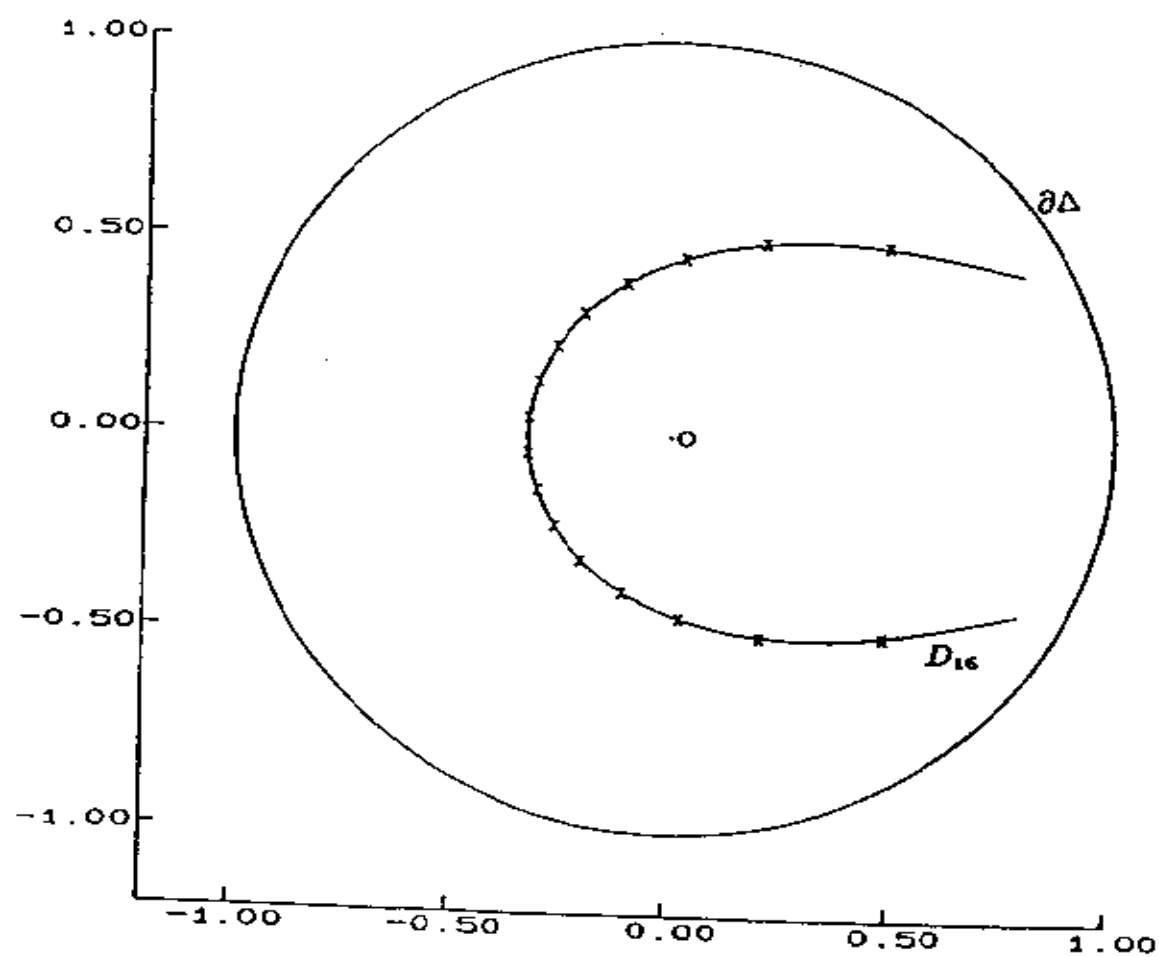


图 4.4 D_{16} 和 $S_{16}(16z)$ 的零点

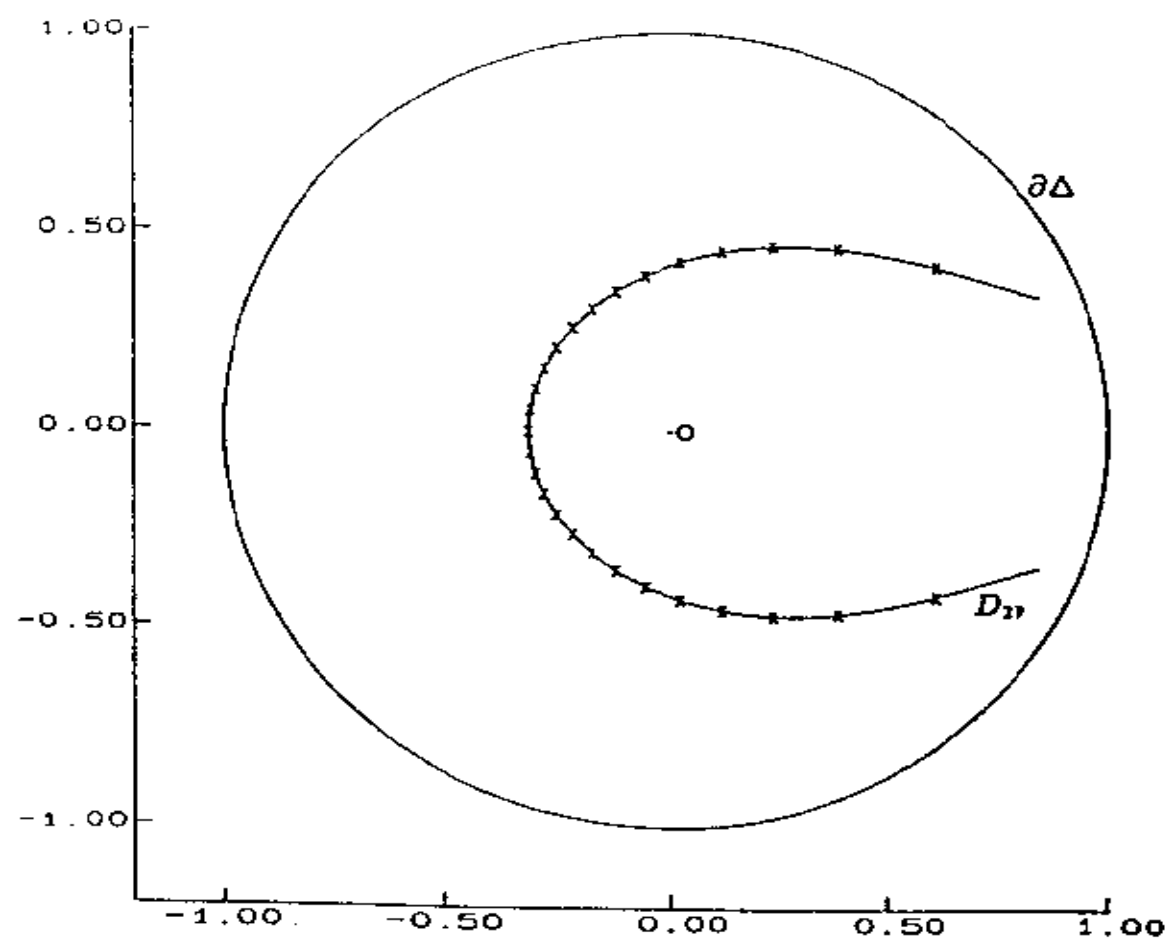


图 4.5 D_{27} 和 $S_{27}(27z)$ 的零点

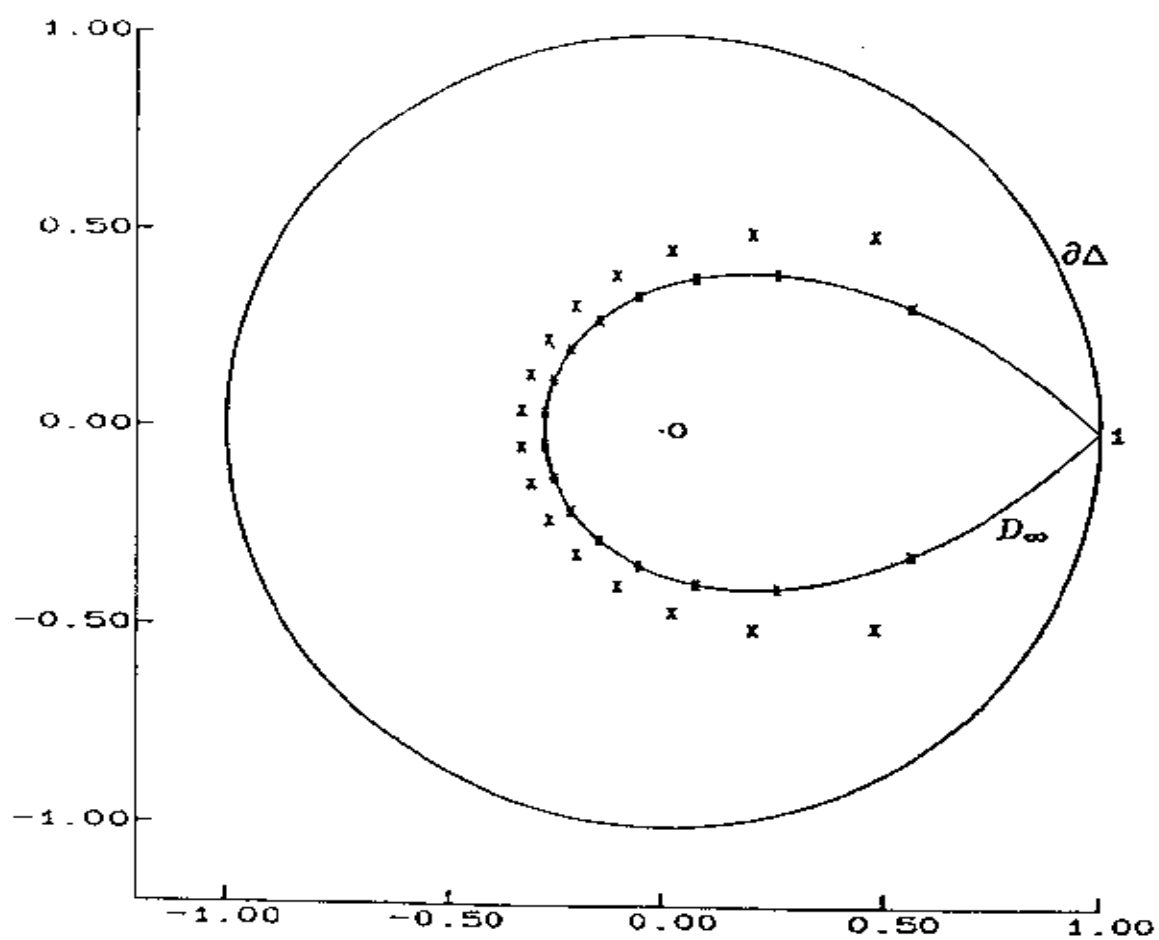


图 4.6 $\{z_{k,16}\}_{k=1}^{16}$ 和 $\{\tilde{z}_{k,16}\}_{k=1}^{16}$

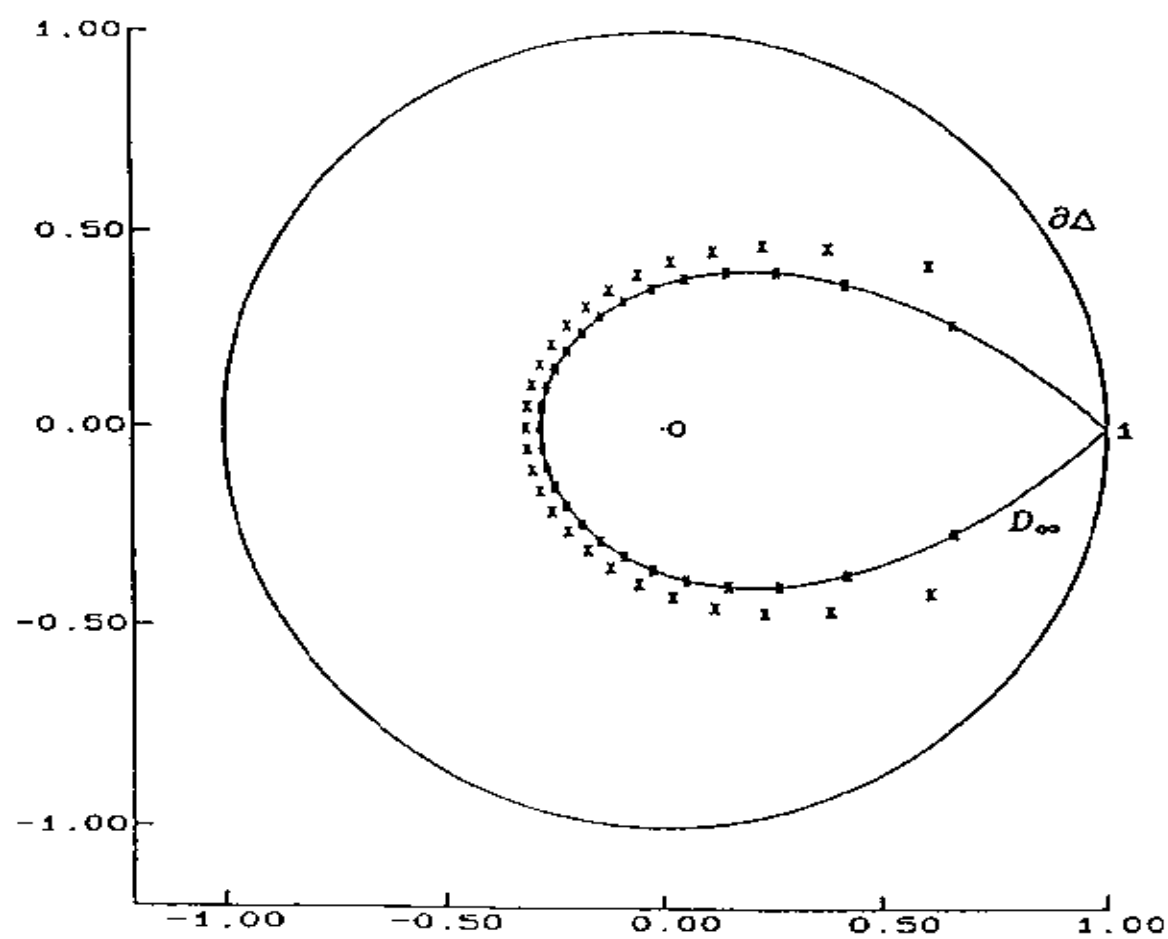


图 4.7 $\{z_{k,27}\}_{k=1}^{27}$ 和 $\{\bar{z}_{k,27}\}_{k=1}^{27}$.

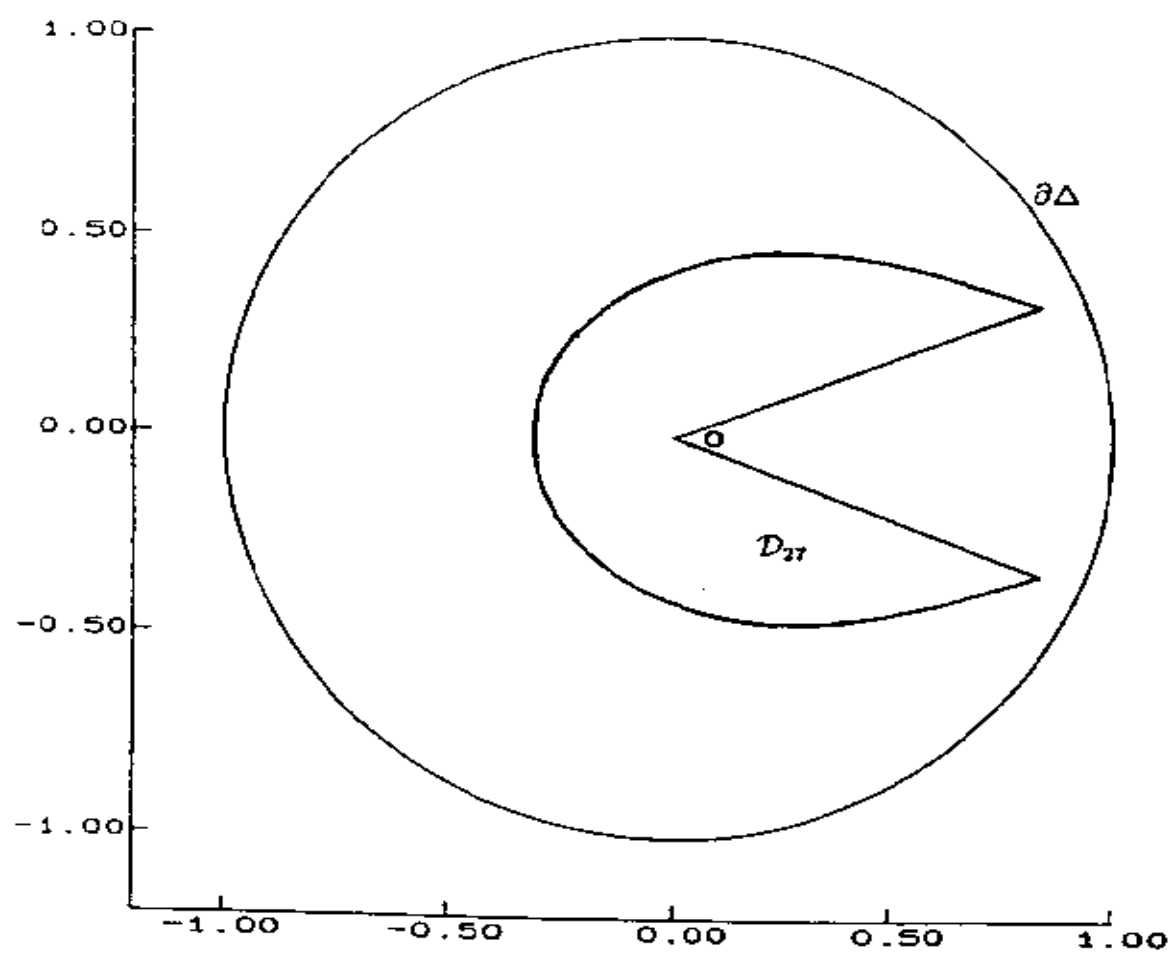


图 4.8 D_{27}

第五章 实最佳有理逼近和复最佳有理逼近

5.1 数 $\gamma_{m,n}$

在这一章中,我们将讨论近来引起广泛兴趣的问题,这就是,当复有理函数和实有理函数(相同阶数的)以一致逼近的范数逼近于实区间 $[-1, 1]$ 上的连续实函数时而产生的问题.

引进记号,令 π_m^r 和 π_m^c 分别表示阶至多为 m , 具有实和复系数的多项式(变量为 z 或者 x) 的集合. 对于任意的非负整数对 (m, n) , $\pi_{m,n}^r$ 和 $\pi_{m,n}^c$ 分别表示形如 p/q 的有理函数集, 其中 p 属于 $\pi_m^r(\pi_m^c)$, q 属于 $\pi_n^r(\pi_n^c)$. 定义 $I := [-1, 1]$, 令 $C_r(I)$ 为 I 上所有连续实值函数集. 对于任一 $C_r(I)$ 中的函数 f , 我们进一步令

$$E_{m,n}^r(f) := \inf_{g \in \pi_{m,n}^r} \|f - g\|_{L_\infty(I)}; \quad E_{m,n}^c(f) := \inf_{g \in \pi_{m,n}^c} \|f - g\|_{L_\infty(I)}, \quad (1.1)$$

这里, 对于任意的定义在 I 上的实值或复值函数 h , 有

$$\|h\|_{L_\infty(I)} := \sup\{|h(x)| : x \in I\}.$$

以上就是本章所要讨论的问题. 我们约定, 对于每一非负整数对 (m, n) , 其中 $n \geq 1$, 存在 $f \in C_r(I)$ 使得

$$\begin{cases} \text{(i)} & E_{m,n}^c(f) < E_{m,n}^r(f), \\ \text{(ii)} & \text{在 } I \text{ 上, 在 } \pi_{m,n}^c \text{ 中 } f \text{ 的最佳一致逼近不唯一.} \end{cases} \quad (1.2)$$

由于对每一非负整数对 (m, n) , $\pi_{m,n}^r$ 是 $\pi_{m,n}^c$ 的真子集, 因此, 对于 $f \in C_r(I)$, 显然从 (1.1) 可得 $E_{m,n}^c(f) \leq E_{m,n}^r(f)$. 因为任一复数包含着两个实参数, 所以, $\pi_{m,n}^r$ 中的任一 $r_{m,n}$ 可与具有两倍于它的实参数个数, 并在 $\pi_{m,n}^c$ 中的 $R_{m,n}$ 相对应, 这启发我们推测: 在 (1.2i) 中, 对于某一 $f \in C_r(I)$, 粗略地说, $E_{m,n}^c(f)$ 至多为 $\frac{1}{2}E_{m,n}^r(f)$. 我们将在 (1.19) 中看到, 除了当对于任意的 $f \in C_r(I)$, $m \geq 0, n = 0$ 时, $E_{m,0}^c(f) = E_{m,0}^r(f)$ 之外, 上述所推测的不等式, 还有其他不等式, 基本上成立.

众所周知 (参见 Meinardus[5], p.161), $C_r(I)$ 中任意的 f 均可以从 $\pi_{m,n}^r$ 中得到在 I 上的唯一的最佳一致逼近 $r_{m,n}$. 另一方面, Walsh([4], p.356) 给出一连续复值函数 $f(z) = z + z^{-1}$, 它在复平面的某一紧新月形集合上没有唯一的最佳一致有理逼近 (从 $\pi_{1,1}^c$ 中). 这一非唯一性甚至对于实区间上的实函数也可能成立, 如 (1.2ii). 这种现象可以使读者感到惊讶.

为了给出一个能体现 (1.2) 的具体例子, 我们首先注意 (参见 [5], p.161), 对于任意的 $f \in C_r(I)$ 和任意的非负整数对 (m, n) , 在 $\pi_{m,n}^r$ 中, $r_{m,n} = p/q$ (这里假设 p 和 q 无公因子) 满足

$$E_{m,n}^r(f) = \|f - r_{m,n}\|_{L_\infty(I)}, \quad (1.3)$$

并且 $r_{m,n}$ 可以用其交错集 $\{\xi_j\}_{j=1}^l$ 的存在性准确地描述. 这里, $-1 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \cdots \leq \xi_l \leq 1$ (固定 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$), 且

$$f(\xi_j) - r_{m,n}(\xi_j) = \lambda(-1)^j E_{m,n}^r(f) \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad (1.4)$$

$$l \geq 2 + \max\{m + \deg q; n + \deg p\}. \quad (1.5)$$

而且此处, 我们约定, 若 $p = 0$, 则 $\deg p = -\infty$ 或 $\deg q = 0$, 此时在 (1.5) 中 $l \geq 2 + m$, 我们也称 l 为交错集 $\{\xi_j\}_{j=1}^l$ 的长度. 考虑 $C_r(I)$ 中的特殊函数 $f(x) = x^2$, 对于所有的实数 x , 取 $r_{1,1}(x) = p(x)/q(x) = \frac{1}{2}$. 由于满足 (1.4) 和 (1.5) 的所有条件 ($l = 3, \lambda = -1, m = n = 1, \deg p = \deg q = 0, \xi_1 = -1, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1$), 因此, 我们有

$$E_{1,1}^r(x^2) = 1/2, \quad (1.6)$$

另一方面, 我们考虑

$$g_{1,1}(x) := \frac{x + (\sqrt{2} - 1)i}{x + i}, \quad (1.7)$$

它是 $\pi_{1,1}^c$ 中的元素. 作简单计算可得

$$\|x^2 - g_{1,1}(x)\|_{L_\infty(I)} = \sqrt{2} - 1 = 0.41421 \dots, \quad (1.8)$$

利用 (1.1), 有 $E_{1,1}^c(x^2) \leq 0.41421 \dots$, 因此从 (1.6) 可得

$$E_{1,1}^c(x^2) < E_{1,1}^r(x^2). \quad (1.9)$$

其次, 对于任意的非负整数对 (m, n) 和任意的 $f \in C_r(I)$, 在 $\pi_{m,n}^c$ 中总存在 $R_{m,n}$ (见 Walsh[14], p.351), 使得 $\|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)} = E_{m,n}^c(f)$. 特别地, 在 $\pi_{1,1}^c$ 中存在 $R_{1,1}$ 使得 $\|x^2 - R_{1,1}\|_{L_\infty(I)} = E_{1,1}^c(x^2)$. 但是从 (1.9) 可知, 显然对于任意的实数 x , $R_{1,1}(x)$ 不可能是实的. 所以, 当 $x^2 - R_{1,1}$ 以及其复共轭在 I 上有相同的一致范数时, 则有

$$E_{1,1}^c(x^2) = \|x^2 - R_{1,1}(x)\|_{L_\infty(I)} = \|x^2 - \overline{R_{1,1}(x)}\|_{L_\infty(I)}. \quad (1.10)$$

这样在 $\pi_{1,1}^c$ 中, 两个不同的元素 $R_{1,1}$ 和 $\bar{R}_{1,1}$ 均是 x^2 的最佳一致逼近. 函数 x^2 体现了 (1.2) (当 $m = n = 1$ 时) 的特性. 我们注意到, 这里证明了, 在通常情况下, 若 (1.2i) 中 $E_{m,n}^c(f) < E_{m,n}^r(f)$, 则 (1.2ii) 中的非唯一性必定成立.

A.A.Gonchar 首先于 1968 年在他的论文 [2] 中的脚注中提及这种非唯一性的可能性. 后来, Gonchar 的学生 K.N.Lungu 证明了这一可能性. 他于 1971 年在文献 [4] 中给出了一个使 (1.2) 成立的充分性条件. 接着, Saff 和 Varga^[9,10] 独立地于 1977 年得到了相同的结果, 并得出使得

$$E_{m,n}^c(f) < E_{m,n}^r(f), \quad \text{对于 } f \in C_r(I)$$

成立的更一般的充分性条件, 以及 $E_{m,n}^c(f) = E_{m,n}^r(f)$ 成立的充分性条件. Saff 和 Varga 的前一个充分性条件后来被 Ruttan^[6] 进一步改进. 他证明了, 如果在 I 上 f 在 $\pi_{m,n}^r$ 中的实最佳一致逼近在长度大于 $m + n + 1$ 的非交错集 (参见 (1.47) 上取得其最大偏差, 则 $E_{m,n}^c(f) < E_{m,n}^r(f)$, 并且这一下界可能在一般情况下是最好的. 这些结果的综述可见 [12] 中的第五章.

现在我们集中讨论 Saff 和 Varga 在 [10] 中所提出的下列问题. 对于每一非负整数对 (m, n) , 定义一非负实数 $\gamma_{m,n}$ 如下

$$\gamma_{m,n} := \inf\{E_{m,n}^c(f)/E_{m,n}^r(f) : f \in C_r(I) \setminus \pi_{m,n}^r\}. \quad (1.11)$$

本质上, 确定数 $\gamma_{m,n}$ 意在看出, 对于 $C_r(I) \setminus \pi_{m,n}^r$ 中的一些具体函数, 在 I 上的 $\pi_{m,n}^c$ 中复最佳有理逼近比 $\pi_{m,n}^r$ 中实最佳有理逼近究竟好多少? 例如对于 $C_r(I)$ 中的函数 x^2 , 已知, $E_{1,1}^c(x^2) = (4/27)^{\frac{1}{2}} = 0.38490 \dots$ (参见 Bennett, Rundick 和 Vaaler[1]). 因此, 由 (1.6) 可得

$$\frac{E_{1,1}^c(x^2)}{E_{1,1}^r(x^2)} = 0.76980 \dots$$

从而求得 $\gamma_{1,1}$ 的上界

$$\gamma_{1,1} \leq 0.76980 \dots, \quad (1.12)$$

对于任意的非负整数 m , 为了精确地求出 $r_{m,0}$, 我们首先建立:

命题1^[10] 给定 $C_r(I)$ 中的任意函数 f 和任意的非负整数对 (m, n) , 则

$$E_{m+n, 2n}^r(f) \leq \inf_{g \in \pi_{m,n}^c} \|f - \operatorname{Reg} g\|_{L_\infty(I)} \leq E_{m,n}^c(f) \leq E_{m,n}^r(f). \quad (1.13)$$

证明 (1.13) 的最后一个不等式显然成立. 考虑 $\pi_{m,n}^c$ 中的 p_m/q_m , 取实部, 我们有

$$\left| f(x) - \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \right| \geq \left| f(x) - \operatorname{Re} \left(\frac{p_m(x)}{q_n(x)} \right) \right| \quad (x \in I),$$

从而 (1.13) 第二个不等式成立. 由于 $\operatorname{Re}(p_m(x)/q_n(x))$ 是 $\pi_{m+n, 2n}^r$ 的元素, 所以 (1.13) 中的第一不等式也成立. \square

在 (1.3) 中取 $n = 0$, 我们有

$$E_{m,0}^c(f) = E_{m,0}^r(f) \quad (f \in C_r(I); m = 0, 1, \dots), \quad (1.14)$$

所以 (参见 (1.11))

$$\gamma_{m,0} = 1 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1.15)$$

至于准确地确定当 $m \geq 0$ 和 $n \geq 1$ 时 (1.11) 中的 $\gamma_{m,n}$ 要比确定 (1.15) 中的 $\gamma_{m,0}$, 在处理方法上要精巧的多. 最近有 4 篇文章讨论了 $\gamma_{m,n} (n \geq 1)$ 的特性. 首先是 Trefethen 和 Gutknecht 的 [11], 他们在 1983 年得到一个相当好的结果

$$\gamma_{m,n} = 0 \quad (n \geq m+3, m = 0, 1, \dots). \quad (1.16)$$

其次是 Levin 的 [3], 他在 1986 年得到了一补充性的结果

$$\gamma_{m,n} = 1/2 \quad (m+1 \geq n \geq 1). \quad (1.17)$$

Levin 对 (1.17) 的证明包含两个部分, 第一部分是用直接构造法证明了 $\gamma_{m,n} \leq 1$. 第二部分是代数方法证明了, 当 $m+1 \geq n \geq 1$ 时,

$\gamma_{m,n} < \frac{1}{2}$ 不成立. (1.16) 和 (1.17) 仅未求出 $\gamma_{m,m+2} (m \geq 0)$. 这一问题被 Ruttan 和 Varga 于 1989 年解决了. 在 [7] 中, 他们证明了 $\gamma_{m,m+2} \leq \frac{1}{3}$. 而在 [8] 中证明了, $\gamma_{m,m+2} < \frac{1}{3}$ 是不成立的. 所以

$$\gamma_{m,m+2} = 1/3 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (1.18)$$

(1.15)—(1.18) 给出了所有的 $\{\gamma_{m,n}\}_{m,n \geq 0}$, 其结果如表 5.1 所示.

表 5.1 $\{\gamma_{m,n}\}_{m,n \geq 0}$

$\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	1	1	1
1	1/2	1/2	1/2	1/2
2	1/3	1/2	1/2	1/2
3	0	1/3	1/2	1/2
4	0	0	1/3	1/2
5	0	0	0	1/3	1/2
6	0	0	0	0
7
...

有趣的是, (1.11) 中的 $\{\gamma_{m,n}\}_{m,n \geq 0}$ 仅取 4 个不同的值: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 和 0. 当 $n \geq 1$ 时, 仅取 3 个不同的值: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0$. 特别是, 对于 $0 < \varepsilon < 1$ 和每一整数对 $(m, n) (m \geq 0, n \geq 1)$, 在 $C_r(I)/\pi_{m,n}^r$ 中存在一 f , 使得

$$\begin{cases} \text{(i)} & E_{m,n}^c(f) < (1 + \varepsilon)E_{m,n}^r(f)/2 \quad (m+1 \geq n \geq 1); \\ \text{(ii)} & E_{m,m+2}^c(f) < (1 + \varepsilon)E_{m,m+2}^r(f)/3 \quad (m = 0, 1, \dots); \\ \text{(iii)} & E_{m,n}^c(f) < \varepsilon E_{m,n}^r(f) \quad (n \geq m+3; m = 0, 1, \dots), \end{cases} \quad (1.19)$$

这是 (1.2i) 的改进.

在下节中, 我们将给出求解 $\gamma_{m,n} (m \geq 0, n \geq 1)$ 的统一方法 [8]. 我们还对 $C_r(I)/\pi_{m,n}^r$ 中的函数 f 感兴趣, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 这些函

数满足

$$\gamma_{m,n} < \frac{E_{m,n}^c(f)}{E_{m,n}^r(f)} < \gamma_{m,n} + \varepsilon \quad (m \geq 0; n \geq 1), \quad (1.20)$$

对于满足 (1.20) 的函数 f , 若 $g \in \pi_{m,n}^c$ 和 $h \in \pi_{m,n}^r$ 满足

$$\|f - g\|_{L_\infty(I)} = E_{m,n}^c(f), \text{ 且 } \|f - h\|_{L_\infty(I)} = E_{m,n}^r(f),$$

则其相关误差

$$f(x) - g(x), \quad f(x) - h(x), \quad x \in I$$

的特性同样是我们所感兴趣的问题.

本章给出了这些问题的有趣的图例.

5.2 $\gamma_{m,n}$ 的上界

为了求出 $\gamma_{m,n} (n \geq 1)$ 的上界, 我们建立

命题 2^[8] 给定任一非负整数对 $(m, n) (n \geq 1)$, 假设

$$g \text{ 在 } \pi_{m,n}^c \setminus \pi_{m,n}^r \text{ 中, 且 } g \text{ 在 } C_r(I) \text{ 中}, \quad (2.1)$$

且 S 在 $C_r(I)$ 中使得存在 $L (\geq m+2)$ 个不同的点 $\{x_j\}_{j=1}^L : -1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_L \leq 1$, 满足

$$\lambda(-1)^j [S(x_j) + \text{Reg}(x_j)] > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, L). \quad (2.2)$$

其中固定 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$, 则

$$\gamma_{m,n} \leq \|S - i\text{Im}g\|_{L_\infty(I)} / M, \quad (2.3)$$

这里

$$M := \min_{1 \leq j \leq L} |S(x_j) + \text{Reg}(x_j)|. \quad (2.4)$$

证明 令 $f := S + \text{Reg}$, 于是 f 是 $C_r(I)$ 的元素, 若 $\pi_{m,n}^r$ 中对于 f 的最佳一致逼近恒为零, 则 (1.5) 式中的约定要求在 I 中存在长度为 $l \geq m+2$ 的交错集. 从 (2.2) 的假设得出, f 的符号在 I 中的

$L(\geq m+2)$ 个不同的点上交替变换. 因此, 利用 de La Vallée-Poisson(参见 [5], p.162) 的结果, 对于 $E_{m,n}^r(f)$ 我们有如下下界

$$E_{m,n}^r(f) \geq M,$$

其中 M 由 (2.4) 定义. 另一方面, 当

$$E_{m,n}^c(f) \leq \|f - g\|_{L_\infty(I)} = \|S - i\operatorname{Im}g\|_{L_\infty(I)},$$

时, 从 (1.11) 中 $\gamma_{m,n}$ 的定义可得 (2.3) 成立. \square

其实, Trefethen, Gutknecht[11], Levin[3], Ruttan, Varga[7] 本质上是应用了命题 2 的变形, 即选择适当的 $g(x)$ 和 $S(x)$ 来求出 $\gamma_{m,n}$ 的上界, 他们有关特殊复有理函数的构造将在下面介绍. 用这些构造方法可以求出 $\gamma_{m,n}$ 的准确上界.

为了证明 $\gamma_{m,m+3} = 0 (m = 0, 1, \dots)$, 我们先用 Trefethen, Gutknecht[11] 中的关于复有理函数的构造法. 对于任意固定的非负整数 m 和任意的 $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ (如果 $m \geq 1$, 则取 $0 < \varepsilon < 1/(2m-1)$). 考虑 $\pi_{m,m+3}^c \setminus \pi_{m,m+3}^r$ 中的复有理函数

$$h_{m,\varepsilon}(x) := \frac{\varepsilon \prod_{j=1}^m [-1 + (2j-1)\varepsilon - x]}{[x+1+\varepsilon]^{m+1}(i\sqrt{\varepsilon}-x)(1+\varepsilon-x)}, \quad (2.5)$$

其中, 当 $m=0$ 时, $\prod_{j=1}^m := 1$. 由 (2.5) 得

$$\operatorname{Re}h_{m,\varepsilon}(x) = \frac{-\varepsilon x \prod_{j=1}^m [-1 + (2j-1)\varepsilon - x]}{[x+1+\varepsilon]^{m+1}(\varepsilon+x^2)(1+\varepsilon-x)} \in \pi_{m+1,m+4}^r, \quad (2.6)$$

和

$$\operatorname{Im}h_{m,\varepsilon}(x) = \frac{-\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \prod_{j=1}^m [-1 + (2j-1)\varepsilon - x]}{[x+1+\varepsilon]^{m+1}(\varepsilon+x^2)(1+\varepsilon-x)} \in \pi_{m,m+4}^r. \quad (2.7)$$

显然, 从 (2.6) 可知, $\operatorname{Re}h_{m,\varepsilon}(x)$ 在 $(-1, 0]$ 中有 $m+1$ 个不同的零点, 且 m 个零点从右边靠近 -1 , 一个零点在原点. 其次, 我们定

义 $m+2$ 个不同的点 $\{x_j(\varepsilon) := -1 + 2j\varepsilon\}_{j=0}^m$ 和 $x_{m+1}(\varepsilon) := 1$, 它们满足 $-1 = x_0(\varepsilon) < x_1(\varepsilon) < \cdots < x_{m+1}(\varepsilon) = 1$. 这 $m+2$ 个点 $\{x_j(\varepsilon)\}_{j=0}^{m+1}$ 正好把 $\operatorname{Re} h_{m,\varepsilon}(x)$ 的 $m+1$ 个零点交替隔开. 我们可以验证, $\operatorname{Re} h_{m,\varepsilon}(x)$ 在这些点上交替变号. 而且, 它在 $-1-\varepsilon$ 上的 $m+1$ 阶极点和在 $1+\varepsilon$ 上的 1 阶极点使得它在这些点上以大致相同的振幅振荡, 亦即, 存在一不依赖于 ε , 但依赖于 m 的常数 c , 使得 (参见 [11])

$$(-1)^j \operatorname{Re} h_{m,\varepsilon}(x_j(\varepsilon)) \geq c \|\operatorname{Im} h_{m,\varepsilon}\|_{L_\infty(I)} / \sqrt{\varepsilon} \quad (j = 0, 1, \dots, m+1). \quad (2.8)$$

利用 (2.5) 中的有理函数 $h_{m,\varepsilon}(x)$ 和命题 2, 我们可得定理 3.

定理 3 (Trefethen, Gutknecht [11]) 对于任一非负整数 m 和任意的整数 $n \geq m+3$, 有

$$\gamma_{m,n} = 0 \quad (n \geq m+3; m = 0, 1, \dots). \quad (2.9)$$

证明 我们首先证明, 对于任一非负整数 m , $\gamma_{m,m+3} = 0$. 对于 $n := m+3$, 令 $S := 0, L := m+2, g := h_{m,\varepsilon}(x) \in \pi_{m,m+3}^c$, 并且利用命题 2. 上述讨论表明, 命题 2 中的 (2.2) 成立, 由 (2.8) 我们得 (参见 (2.4))

$$M := \max_{0 \leq j \leq m+1} |\operatorname{Re} h_{m,\varepsilon}(x_j(\varepsilon))| \geq c \|\operatorname{Im} h_{m,\varepsilon}\|_{L_\infty(I)} / \sqrt{\varepsilon}.$$

从而由命题 2 中的 (2.3), 得

$$\gamma_{m,m+3} \leq \sqrt{\varepsilon}/c. \quad (2.10)$$

但由于 (2.10) 中的 c 和 ε 无关, ε 可取任意小, 则有

$$\gamma_{m,m+3} = 0. \quad (2.11)$$

进而, 对于每个 $n \geq m+3$, 由于 $\pi_{m,n}^c \supset \pi_{m,m+3}^c$, 利用同一个函数 $h_{m,\varepsilon}$ 可以导出 $\gamma_{m,n} = 0$ ($n \geq m+3, m = 0, 1, \dots$), 此即为所需的结果 (2.9). \square

在上述讨论中, (2.6) 中的 $f(x) := \operatorname{Re} h_{m,\varepsilon}(x)$ 为 $C_r(I)$ 中的函数, 同时可由 $\pi_{m,m+3}^r$ 中的恒零函数和 $\pi_{m,m+3}^c$ 中的 $h_{m,\varepsilon}(x)$ 逼近它. 由于 f 在 I 上的 $m+2$ 个不同的点上振荡 (即 (2.8)), $\pi_{m,m+3}^r$ 中的恒零函数是 I 上 $\pi_{m,m+3}^r$ 中 f 的一个几乎最佳逼近, 并且

$$E_{m,m+3}^r(f) = \|f\|_{L_\infty(I)} = \|\operatorname{Re} h_{m,\varepsilon}\|_{L_\infty(I)}.$$

这样, 图 5.1 给出了函数 $f(x) = \operatorname{Re} h_{5,\varepsilon}(x)$ 当 x 在 I 中时的图象, 并表明了, 当 $\varepsilon = 0.1$ 时, 在 I 上它的 7 次振荡. 由于有些振荡幅度极其微小, 图 5.2 把图 5.1 中的虚线矩形部分放大 15 倍, 在 y 方向上使得这些微小的振荡显示得更加清楚. 其次, 根据定义, 此时的复误差正好为 $f(x) - g(x) = -i \operatorname{Im} h_{5,\varepsilon}(x)$, 并且当 x 从 -1 递增到 $+1$ 时, 其路径在复平面上并无特别 (可以忽略). 这是由于此路径恰是限定在一个以虚轴为对称的线段上的运动.

关于定理 3 的结果 (2.9), E.B.Saff 指出, 任意小数 $\gamma_{m,n}$ 的存在性早已包含在 Walsh 1934 年的结果中了 (参见 [13], 定理 IV), 虽然当时人们并没有注意到 Walsh 的结果和 $\gamma_{m,n}$ 的联系, 特别是 Walsh 证明了, 对于每一固定的非负整数 m , 函数 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \pi_{m,n}^c$ 在 $C_c(I)$ (I 上所有连续复值函数的空间) 中是稠密的, 从而在 $C_r(I)$ ($C_c(I)$ 的子集) 中选取任意的 f , 从稠密性推得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{m,n}^c(f) = 0 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (2.12)$$

另一方面, 令 $T_j(x)$ ($j \geq 0$) 表示 j 阶 Chebyshev 多项式 (第一类). 在 $C_r(I)$ 中特取 $f(x) := T_{m+1}(x)$, 在 $\pi_{m,n}^r$ 中取 $\gamma_{m,n} = 0$, 则 $f - 0$ 在 I 中有一长度为 $m+2$ 的交替集. 并且, 从已知 $\|T_{m+1}\|_{L_\infty(I)} = 1$ 可以推出 (参见 (1.4))

$$E_{m,n}^r(f) = 1 \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.13)$$

显然, 联立 (2.12) 和 (2.13) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{m,n} = 0 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (2.14)$$

但是我们可以看出, 定理 3 的 (2.9) 比 (2.14) 更为精确.

下面我们讨论 Levin [3] 中求 $\gamma_{n+2k,n}$ ($n \geq 1, k \geq 1$) 上界的方法 (我们将在后面第 3 节中证明此上界是不可能被进一步改进的).

对于充分小 $\varepsilon > 0$, 考虑复有理函数

$$h_{2k,n,\varepsilon}(x) := T_{2k}(x) \left(\frac{x - i\varepsilon}{x + i\varepsilon} \right)^n \in \pi_{2k+n,n}^c \setminus \pi_{2k+n,n}^r \quad (n \geq 1), \quad (2.15)$$

其中, $T_{2k}(x)$ 表示 (第一类) $2k$ 阶 Chebyshev 多项式, k 为任意正整数, 则

$$\operatorname{Re} h_{2k,n,\varepsilon}(x) = T_{2k}(x) \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{x - i\varepsilon}{x + i\varepsilon} \right)^n \right\} \in \pi_{2n+2k,2n}^r. \quad (2.16)$$

对于每一实数 x , 记 $x + i\varepsilon = \rho e^{i\theta}$, 因此 $((x - i\varepsilon)/(x + i\varepsilon))^n = e^{-2ni\theta}$, 从而得出

$$\operatorname{Re}\{[(x - i\varepsilon)/(x + i\varepsilon)]^n\} = \cos(2n\theta), \quad (2.17)$$

由上述证明可以得出, $\operatorname{Re}\{[(x - i\varepsilon)/(x + i\varepsilon)]^n\}$ 有 $2n$ 个不同的零点: $\left\{x_j(\varepsilon) := -\varepsilon \cot\left[\frac{(2j+1)\pi}{4n}\right]\right\}_{j=0}^{2n-1}$, 这些零点集中在 I 中原点的一个 ε 邻域内. 其次, $T_{2k}(x)$ 在 I 中的 $2k$ 个零点为 $\left\{y_i := \cos\left[\frac{(2i+1)\pi}{4k}\right]\right\}_{i=0}^{2k-1}$. 因为 $T_{2k}(0) = (-1)^k \neq 0$, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, $T_{2k}(x)$ 的这些零点和点 $\{x_j(\varepsilon)\}_{j=0}^{2n-1}$ 不重合, 因此, 对于充分小的 $\varepsilon > 0$, $\{x_j(\varepsilon)\}_{j=0}^{2n-1} \cup \{y_i\}_{i=0}^{2k-1}$ 为 $\operatorname{Re}h_{2k,n,\varepsilon}$ 在 I 中的 $2n+2k$ 个不同的零点. 因此, 从 (2.16) 和 (2.17) 不难验证, I 中存在着 $2n+2k+1$ 个不同的点 $\{w_j(\varepsilon)\}_{j=0}^{2n+2k}$, 把这些零点分开, 另外在这些点上 (参见 [3]), $\operatorname{Re}h_{2k,n,\varepsilon}(x)$ 取值为 $1 - o(1)$, 且在这些点上有不同的符号, 亦即, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 有

$$(-1)^j \operatorname{Re}h_{2k,n,\varepsilon}(w_j(\varepsilon)) \geq 1 - o(1) \quad (j = 0, 1, \dots, 2n+2k). \quad (2.18)$$

利用 (2.15) 中的有理函数 $h_{2k,n,\varepsilon}$ 和命题 2, 对于 $m = 2k + n$ 这一特殊情形, 我们建立定理 4.

定理 4 (Levin[3]) 对于任意的非负整数对 (m, n) , 其中 $m+1 \geq n \geq 1$, 我们有

$$\gamma_{m,n} \leq \frac{1}{2}. \quad (2.19)$$

证明 我们先证明 $\gamma_{2k+n,n} \leq \frac{1}{2}$. 令 $m := n + 2k$, 其中 $k \geq 1$ 且 $n \geq 1$. 再令 $S(x) := \operatorname{Re}h_{2k,n,\varepsilon}(x)$, $L := 2n + 2k + 1$, $g(x) := h_{2k,n,\varepsilon}(x) \in \pi_{2k+n,n}^c$, 并且利用命题 2. 首先注意到, 由于假设 $n \geq 1$, 则 $L \geq m + 2 = n + 2k + 2$. 前面的讨论已指出命题 2 中的 (2.2) 仍然成立. 由 (2.18) 我们有 (参见 (2.4))

$$M := \min_{0 \leq j \leq 2n+2k} |2\operatorname{Re}h_{2k,n,\varepsilon}(w_j(\varepsilon))| \geq 2 - o(1), \text{ 当 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 时.}$$

其次, 经计算可得

$$\begin{aligned} \|S(x) - i\operatorname{Im}g(x)\|_{L_\infty(I)} &= \|\operatorname{Re}h_{2k,n,\varepsilon}(x) - i\operatorname{Im}h_{2k,n,\varepsilon}(x)\|_{L_\infty(I)} \\ &= \|\overline{h_{2k,n,\varepsilon}(x)}\|_{L_\infty(I)} = 1, \end{aligned}$$

因此, 从 (2.16) 可得, $\left\| \left(\frac{x+i\varepsilon}{x-i\varepsilon} \right)^n \right\|_{L_\infty(I)} = 1 = \|T_{2k}\|_{L_\infty(I)}$ 且 $h_{2k,n,\varepsilon}(0) = 1$. 利用命题 2 的 (2.3) 可直接得

$$\gamma_{2k+n,n} \leq \frac{1}{2-o(1)} \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.20)$$

在上式中令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有

$$\gamma_{2k+n,n} \leq \frac{1}{2} \quad (k=1, 2, \dots; n \geq 1),$$

这是 (2.19) 当 $m = 2k + n$ 时的特殊情形, 其他情况的证明也类似 (见 [3]). \square

在上述证明中, $f(x) = 2\operatorname{Re}h_{2k,n,\varepsilon}(x)$ 是 $C_r(I)$ 中的函数, 它可用 $\pi_{2k+n,n}^r$ 中的恒零函数和 $\pi_{2k+n,n}^c$ 中的 $h_{2k,n,\varepsilon}(x)$ 同时逼近. 在图 5.3 中, 我们给出了函数 $2\operatorname{Re}h_{2,5,\varepsilon}(x)$ 的图象 (对于 I 中的 x 和 $\varepsilon = 0.1$), 并且还给出了它在 I 中 9 个几乎等振荡点, 此时的复误差正好为

$$f(x) - g(x) = \overline{h_{2,5,\varepsilon}(x)} \quad (x \in I),$$

在图 5.4 中给出了当 x 从 -1 增加到 $+1$ 时, 其在复平面上的路径. 注意此路径非常有趣, 是近图形的.

最后, 我们给出 Ruttan 和 Varga[7] 中求上界 $\gamma_{m,m+2} \leq \frac{1}{3}$ ($m = 0, 1, \dots$) 的方法. 对于任意满足 $0 < \varepsilon < 1/m + 1$ 的 ε , 令 m 是任意固定的非负偶数, 考虑下列函数

$$l_j(z) := l_j(z; \varepsilon, m) := \frac{-\frac{2\varepsilon i}{3}(-1)^j}{z - 1 + \frac{2j}{m+1} - \varepsilon i} \quad (j = 0, 1, \dots, m+1). \quad (2.21)$$

由上式可以证明, 对于 $j = 0, 1, \dots, m+1$, 我们有

$$l_j\left(1 - \frac{2j}{m+1}\right) = \frac{2}{3}(-1)^j, \text{ 和 } l_j\left(1 - \frac{2j}{m+1} \pm \varepsilon\right) = \frac{(1 \mp i)(-1)^j}{3}, \quad (2.22)$$

由于每一 $l_j(z)$ 是 Möbius 变换, l_j 把实轴 \mathbb{R} 映射到复平面的某一广义圆上. 由于 $l_j(\infty) = 0$, 这一广义圆必定通过原点. 此外, 由于 $l_j(z)$ 的极

点 $1 - (2j)/(m+1) + \varepsilon_j$ 映射到 \mathbb{R} 上时, 为 $w_j := (-z_j)/(m+1) - \varepsilon_j$, 所以, 由 (2.21) 得

$$l_j(w_j) = \frac{1}{3}(-1)^j \quad (j = 0, 1, \dots, m+1). \quad (2.23)$$

这样, 从 Möbius 变换的对称原则可知, \mathbb{R} 在 $w = l_j(z)$ 的映射下的象是, 中心为 $\frac{1}{3}(-1)^j$, 半径为 $\frac{1}{3}$ 的圆 (因为这个圆通过原点); 从几何意义上, 显然有

$$\|\operatorname{Re} l_j\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \|L_j\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \frac{2}{3}, \|\operatorname{Im} l_j\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \frac{1}{3}, \quad (2.24)$$

对于 $j = 0, 1, \dots, m+1$.

为了延拓 (2.24) 的结果, 我们定义实区间 $I_k(m)$ 为

$$I_k(m) := \left[1 - \frac{2k+1}{m+1}, 1 - \frac{2k-1}{m+1}\right] \cap I \quad (k = 0, 1, \dots, m+1), \quad (2.25)$$

使得这些区间覆盖 $I := [-1, +1]$, 亦即

$$\bigcup_{k=0}^{m+1} I_k(m) = I.$$

从 $l_j(x)$ 和 $I_k(m)$ 的定义 (此时 m 是固定的)

$$\|l_j\|_{L_\infty(I_k(m))} = O(\varepsilon), \text{ 对于 } k \neq j \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (2.26)$$

并从 (2.22) 可得

$$\|\operatorname{Re} l_j\|_{L_\infty(I_j(m))} = \frac{2}{3}, \text{ and } \|\operatorname{Im} l_j\|_{L_\infty(I_j(m))} = \frac{1}{3} \quad (j = 0, 1, \dots, m+1). \quad (2.27)$$

现在考虑复有理函数 $g(x)$

$$h(x) = h(x; \varepsilon, m) := \sum_{j=0}^{m+1} l_j(x). \quad (2.28)$$

对 $h(x)$ 进行有理化, 得

$$h(x) = \frac{\frac{-2\varepsilon i}{3} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m+1} \left\{ x - 1 + \frac{2k}{m+1} - \varepsilon i \right\}}{\prod_{k=0}^{m+1} \left\{ x - 1 + \frac{2k}{m+1} - \varepsilon i \right\}}, \quad (2.29)$$

这样, h 至少是 $\pi_{m+1, m+2}^c$ 中的元素, 但是 (2.29) 中 $h(x)$ 的分子为

$$\frac{-2\varepsilon i}{3} \left\{ x^{m+1} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j + x^s (0 \leq s \leq m) \text{ 的低阶项} \right\}.$$

由假设 m 是偶的, 则 $\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j = 0$, 此即 h 是 $\pi_{m, m+2}^c$ 中的元素. 更精

确地说, 可以验证 (2.29) 中 $h(x)$ 的分子 x^m 的系数为 $-\frac{2(m+2)\varepsilon i}{3(m+1)} \neq 0$. 这样 h 是 $\pi_{m, m+2}^c$ 的元素, 但对于 $s < m$, h 不是 $\pi_{s, m+2}^c$ 中的元素. 有意思的是, (2.28) 正好是 $h(x)$ 部分分式展开. 利用 (2.29) 的有理函数 h 和命题 2, 我们有定理 5.

定理 5^[7] 对于任一非负的整数 m , 有

$$\gamma_{m, m+2} \leq \frac{1}{3}. \quad (2.30)$$

证明 对一固定的非负偶整数 m , 考虑 \mathbb{R} 上的连续实函数 $s(n)$:

$$s(u) := \begin{cases} \frac{1-u^2}{1+u^2}, & -1 \leq u \leq +1, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases} \quad (2.31)$$

这样, $s(0) = 1, s(\pm 1) = 0$, 当 $0 \leq |u| < 1$ 时, $0 < s(u) < 1$. 再次令 $0 < \varepsilon < 1/(m+1)$, 设

$$S_{\varepsilon, m}(x) := \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j s\left(\frac{x-1+\frac{2j}{m+1}}{\varepsilon^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (2.32)$$

由此可知, $S_{\varepsilon,m}(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续实函数, 且

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon,m}\left(1 - \frac{2j}{m+1}\right) &= \frac{(-1)^j}{3} \text{ 和 } S_{\varepsilon,m}\left(1 - \frac{2j}{m+1} \pm \varepsilon^2\right) \\ &= 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m+1). \end{aligned} \quad (2.33)$$

从几何上来说, $S_{\varepsilon,m}(x)$ 在 I 上有 $m+2$ 个交错峰值, 且每一峰值分别落在互不相连的区间中:

$$\left[1 - \frac{2j}{m+1} - \varepsilon^2, 1 - \frac{2j}{m+1} + \varepsilon^2\right] \quad (j = 0, 1, \dots, m+1).$$

利用上述定义, 置 $n = m+2, L = m+2, S(x) = S_{\varepsilon,m}(x)$ (由 (2.32) 式给定), $g(x) = h(x; \varepsilon, m)$ (由 (2.28) 式给定), 并且应用命题 2. 因此, 由 (2.22), (2.26)–(2.28) 和 (2.33), 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} &(-1)^j \left[S_{\varepsilon,m}\left(1 - \frac{2j}{m+1}\right) + \operatorname{Reg}\left(1 - \frac{2j}{m+1}\right) \right] \\ &= 1 + O(\varepsilon) \quad (j = 0, 1, \dots, m+1), \end{aligned} \quad (2.34)$$

从而有 (见 (2.4))

$$M := \min_{0 \leq j \leq m+1} \left| S_{\varepsilon,m}\left(1 - \frac{2j}{m+1}\right) + \operatorname{Reg}\left(1 - \frac{2j}{m+1}\right) \right| = 1 + O(\varepsilon). \quad (2.35)$$

另一方面, 考虑 I 上的 $S_{\varepsilon,m}(x) - i\operatorname{Im}g(x)$, 对于 (2.25) 中的特殊区间 $I_k(m)$, 从 (2.26) 可得

$$S_{\varepsilon,m}(x) - i\operatorname{Im}g(x) = S_{\varepsilon,m}(x) - i\operatorname{Im}l_k(x) + O(\varepsilon) \quad (x \in I_k(m)).$$

进一步, 由 (2.27) 和 (2.32), 经简单计算可得

$$\|S_{\varepsilon,m}(x) - i\operatorname{Im}l_k(x)\|_{L_\infty(I_k(m))} = \frac{1}{3} + O(\varepsilon) \quad (k = 0, 1, \dots, m+1),$$

因此, 利用 (2.26) 得

$$\|S_{\varepsilon,m}(x) - i\operatorname{Im}g(x)\|_{L_\infty(I)} = \frac{1}{3} + O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (2.36)$$

这样从命题 2 的 (2.3) 可得

$$\gamma_{m,m+2} \leq \frac{1}{3} + O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

并且令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 我们有

$$\gamma_{m,m+2} \leq \frac{1}{3}.$$

当 m 是偶数时, 此即为所要求的结果.

当 m 是奇数时, 对 (2.21) 的定义作如下简单的修正:

$$l_j(z) = l_j(z; \varepsilon, m) := \frac{-\frac{2\varepsilon i}{3} \mu_j (-1)^j}{z - 1 + \frac{2j}{m+1} - \varepsilon \mu_j i} \quad (j = 0, 1, \dots, m+1), \quad (2.37)$$

其中, $\{\mu_j\}_{j=0}^{m+1}$ 是 $m+2$ 个固定的正数, 且满足

$$0 \leq \mu_j \leq 1,$$

和

$$\sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j \mu_j = 0 \text{ and } \sum_{j=0}^{m+1} j(-1)^j \mu_j \neq 0. \quad (2.38)$$

再一次利用命题 2 即可得所要证的结果. \square

在上述证明中, $f_{\varepsilon, 2m}(x) = S_{\varepsilon, 2m}(x) + \operatorname{Re} h(x; \varepsilon, 2m)$ 是 $C_r(I)$ 中的函数, 它可用 $\pi_{2m, 2m+2}^r$ 中的恒零函数和 $\pi_{2m, 2m+2}^c$ 的函数 $h(x; \varepsilon, 2m)$ 同时逼近. 在图 5.5 中, 我们给出了当 $\varepsilon = 0.1$ 时, 函数 $S_{\varepsilon, 2}(x) + \operatorname{Re} h(x; \varepsilon, 2m)$ ($x \in I$) 的图象, 并标出 4 个峰值和 4 个几乎等值振荡. 其次, 此时的复误差为 $S_{\varepsilon, 2}(x) - i \operatorname{Im} h(x; \varepsilon, 2)$. 当 x 从 -1 递增到 $+1$ 时, 其在复平面上的路径如图 5.6 所示. 从 (2.36) 可知, 这个路径被限制在圆盘中 $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \frac{1}{3} + o(\varepsilon)\}$, 但它并没有体现出近圆性.

本节中的证明方法和图示说明了如何选择不同的函数 (在 $C_r(I)$ 中) 来求在 (2.9), (2.19) 和 (2.30) 三种不同的情况下, $\gamma_{m,n}$ 的精确上界.

5.3 $\gamma_{m,n}$ 的下界

为了确定 $\gamma_{m,n}$ 的下界, 我们介绍 Ruttan 和 Varga([8], 定理 4, 5) 的下述两个结论.

对于一个给定的实 (或复的) 多项式 p , 令 ∂p 表示 p 的精确阶. 若 $R = p/q$ 在 I 上连续, 这里 p 和 q 为实多项式, 则可以证明, $\operatorname{Re} R = R$

在 I 中至多可能有 ∂p 次变号, 且 R 每次变号对应 p 的一个零点. 但是, 若 $R = p/q$ 是 I 上的连续复值函数, $\operatorname{Re} R$ 在 I 上的变号次数不仅和 ∂p 和 ∂q 有关, 而且也 and $\operatorname{Re} R$ 在 I 中的振荡幅度有关. 这在 [8] 中作了讨论. 此外, 这里 $[x]$ 表示 $N \leq x$ 的最大整数 N .

定理 6^[8] 令 $\phi = p/q$ 是一复有理函数, 在 I 中没有极点, 且满足 $\|\operatorname{Im} \phi\|_{L_\infty(I)} \leq 1$. 设存在实数 $d > 0$ 和 $\{x_j\}_{j=1}^L, -1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_L \leq 1$, 使得下式成立

$$\lambda(-1)^j \operatorname{Re} \phi(x_j) \geq d \quad (j = 1, 2, \dots, L). \quad (3.1)$$

这里固定 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$. 若 $\partial q \leq \partial p, d \geq 1$, 则

$$L \leq \partial p + 1. \quad (3.2)$$

同样, 若 $\partial q > \partial p$, 则

$$L \leq \partial q, \quad \text{当 } d \geq 1 \text{ 时}, \quad (3.3)$$

和

$$L \leq \left\lceil \frac{\partial p + \partial q + 1}{2} \right\rceil, \quad \text{当 } d \geq 2 \text{ 时}. \quad (3.4)$$

证明 我们利用 Levin[3] 中建议用的几何论证方法来证明 (3.2) 成立. 设 $\partial q \leq \partial p, d \geq 1$. 令 B 表示在复平面上顶点为 $\pm d \pm i$ 的闭矩形, 且使得圆 $C = \{z : |z| = 1\}$ 是 B 的子集, 如图 5.7 所示. 从条件 3.1 和假设 $\|\operatorname{Im} \phi\|_L \leq 1$ 可以得出, 曲线 $\Gamma_1 = \{z = \phi(x) : x \in R\}$ (在广义的复平面上) 与 B 的垂直边相交. 因此, 当 x 从 x_1 递增到 x_L 时, Γ_1 与圆环 C 在 $2(L-1)$ 个点上相交 (这里, 若 Γ_1 与 C 相切, 则切点计算为 2 个相交点). 对于 I 中的 t , 若 $\phi(t)$ 是 Γ_1 和 C 的相交点, 则

$$|\phi(t)|^2 = \left| \frac{p(t)}{q(t)} \right|^2 = 1,$$

而且, t 是实多项式

$$P(x) = |p(x)|^2 - |q(x)|^2$$

的一个零点.

上述讨论表明了, 在 I 中至少存在 $2(L-1)$ 个 $P(x)$ 的零点, 由于 $\partial p > \partial q$, 所以 $\partial P \leq \partial p$. 这样, $2(L-1) \leq \partial P \leq 2\partial p$, 因此

$L \leq \partial p + 1$. 这就是 (3.2). 事实上, 定理 5 的其余部分的证明在几何意义上是类似的, 但必须分为几种情形来讨论 (参见 [8]). \square

正如在 [8] 中所证明的, 定理 6 中的结论 (3.2)–(3.4) 在下述意义下是精确的: (i) 存在满足适当假设的复有理函数, 使得 L 的上界 (3.2)–(3.4) 可以达到, 亦即 (3.2)–(3.4) 中的等式可以成立. (ii) 对于任意正数 $d < 1$ (或者 < 2), 存在有理函数除了不满足 (3.3) (或 (3.4)) 中对 d 的假设之外, 满足定理 6 中的所有假设, 且使得 (3.3) (或 (3.4)) 中 L 的上界可以超过.

利用定理 6, 可以求出 $\gamma_{m,n}$ 的下界.

定理 7^[8] 设 (m, n) 中非负整数对 ($n \geq 1$), $f \in C^r(I) \setminus \pi_{m,n}^r$, 并且令 $r_{m,n}$ 和 $R_{m,n}$ 分别是 f (在 I 上) $\pi_{m,n}^r$ 和 $\pi_{m,n}^c$ 中的最佳一致逼近的有理函数, 则

$$\frac{\|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)}}{\|f - r_{m,n}\|_{L_\infty(I)}} > \frac{1}{2}, \quad \text{若 } m+1 \geq n \geq 1 \quad (3.5)$$

和

$$\frac{\|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)}}{\|f - r_{m,n}\|_{L_\infty(I)}} > \frac{1}{3}, \quad \text{若 } m+2 \geq n \geq 1. \quad (3.6)$$

相应地还有

$$\gamma_{m,n} = \frac{1}{2} \quad \text{如果 } m+1 \geq n \geq 1, \quad (3.7)$$

$$\gamma_{m,m+2} = 1/3. \quad (3.8)$$

证明 令 $s = \|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)} / \|f - r_{m,n}\|_{L_\infty(I)}$ 使得 $0 \leq s \leq 1$, 且令 $e = f - r_{m,n}$, $R_{m,n} = p_1/q_1$, $r_{m,n} = p_2/q_2$, 这里假设 (p_1, q_1) 和 (p_2, q_2) 无公因子. 由于 $f \notin \pi_{m,n}^r$, 可以通过乘上一个适当的非零常数, 我们假设 $\|e\|_{L_\infty(I)} = 1$, 则

$$s = \|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)}. \quad (3.9)$$

由于 $\gamma_{m,n}$ 是 I 上 $\pi_{m,n}^r$ 中 f 的最佳一致逼近, 所以至少存在 L 个不同的点 $\{x_j\}_{j=1}^L$, $-1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_L = 1$, 这里有

$$L \geq 2 + \max[m + \partial q_2; n + \partial p_2] = m + m + 2 - \min[m - \partial p_2; n - \partial q_2] \quad (3.10)$$

使得 $e(x_j) = (-1)^j \lambda, 1 \leq j \leq L$ (这里固定 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$) (见 (1.5)). 若有必要, 我们可以乘上 -1 , 这样可以假设 $\lambda = 1$, 使得 $e_1(x_1) = -1$.

进行规范化, 则有, 对于 $1 \leq j \leq L$

$$\begin{aligned} s &= \|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)} \geq |f(x_j) - R_{m,n}(x_j)| \\ &= |(-1)^j + r_{m,n}(x_j) - R_{m,n}(x_j)|. \end{aligned}$$

在上式中取实部, 可得

$$(-1)^j \{\operatorname{Re} R_{m,n}(x_j) - r_{m,n}(x_j)\} \geq 1 - s \quad (j = 1, 2, \dots, L). \quad (3.11)$$

其次, 令 $\phi(x) = (R_{m,n}(x) - r_{m,n}(x))/s = p(x)/q(x)$, 这里 p 和 q 为没有公因子的复多项式, 从 (3.11) 可得

$$(-1)^j \operatorname{Re} \phi(x_j) \geq (1 - s)/s =: d \quad (j = 1, 2, \dots, L), \quad (3.12)$$

由于 $s = \|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)} \geq \|\operatorname{Im} R_{m,n}\|_{L_\infty(I)}$ (见 (3.9)), 类似地, 我们有

$$\|\operatorname{Im} \phi\|_{L_\infty(I)} \leq 1. \quad (3.13)$$

考虑到定理 7 中的 (3.5), 进行简化并利用定义, 可得

$$m + 1 \geq n \geq 1 \text{ 蕴涵 } s > \frac{1}{2}.$$

或者等价地 (逆反)

$$s \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m + 1 < n,$$

亦即

$$s \leq 1/2 \Rightarrow m + 2 \leq n. \quad (3.14)$$

为了证明 (3.14) 成立, 可设 s 满足 $0 < s < \frac{1}{2}$, 从 (3.12) 可推出 $d \geq 1$, 因为定理 6 的所有假设均成立, 所以从定理 6 的 (3.2), (3.3) 可推出

$$L \leq \partial p + 1 \text{ 若 } \partial q \leq \partial p, \quad L \leq \partial q \text{ 若 } \partial q > \partial p. \quad (3.15)$$

假设 $\partial q > \partial p$, 从 (3.15) 的第二部分得出 $L \leq \partial q$. 从 (3.10) 及定义: $\phi = p/q = (R_{m,n} - r_{m,n})/s = (p_1/q_1 - p_2/q_2)/s, L \leq \partial q$ 可表示为

$$m + m + 2 - \min[m - \partial p_2, n - \partial q_2] \leq \partial q = \partial q_1 + \partial q_2,$$

或等价地

$$\{n - \partial q_1\} + \{(n - \partial q_2) - \min[m - \partial p_2; n - \partial q_2]\} \leq n - (m + 2). \quad (3.16)$$

但由于 (3.16) 大括号中的每一项显然是非负的, 因此, $n - (m + 2) \geq 0$, 即 $m + 2 \leq n$. 当 $\partial q > \partial p$ 时, 这就是所要证的结果. 然而, 类似的论证表明, 当假设 $\partial q \leq \partial p$ 时, 将导出矛盾. 因此, 定理 7 的 (3.5) 成立. 从而从 (3.5) 显然有

$$\gamma_{m,n} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{当 } m + 1 \geq n \geq 1 \text{ 时,}$$

且由于 (2.19) 中的反向不等式也成立, 则如 Levin 在 [3] 中所证明的那样

$$\gamma_{m,n} = \frac{1}{2}, \quad \text{当 } m + 1 \geq n \geq 1 \text{ 时.}$$

这就是 (3.7) 所要求的结果. 类似地 (见 [8]), 可以证明 (3.6) 成立. 由此, 并利用 (3.20) 可得 (3.8) 成立, 这也是所要求的结果. \square

我们注意到, (3.5) 中的严格不等式给出了更强的结果, 即在 $C_r(I) \setminus \pi_{m,n}^r$ 中不存在 f , 使得

$$\frac{\|f - R_{m,n}\|_{L_\infty(I)}}{\|f - r_{m,n}\|_{L_\infty(I)}} = \gamma_{m,n} = \frac{1}{2} \quad \text{若 } m + 1 \geq n \geq 1 \quad (3.17)$$

成立. 这里, $r_{m,n} \in \pi_{m,n}^r$ 和 $R_{m,n} \in \pi_{m,n}^c$ 分别是在 I 上 $\pi_{m,n}^r$ 和 $\pi_{m,n}^c$ 中 f 的最佳一致逼近. 这样, 如在 (1.11) 中所定义的那样, 当 $m + 1 \geq n \geq 1$ 时, $\gamma_{m,n}$ 为真正的下确界 (但不是最小值). 同样地, 对于 $m \geq 0$, 成立 $\gamma_{m,m+2} = \frac{1}{3}$, 对于 $n \geq m + 3$, $\gamma_{m,n} = 0$. 回顾一下, 这就是为什么在 §5.2 中所有的证明均依赖于一个小参数 $\varepsilon > 0$ 的原因.

参考文献

- [1] C.Bennett, K.Rudnick, and J.D.Vaaler, "Best uniform approximation by linear fractional transformations", J. Approx. Theory **25** (1979), 204-224.

- [2] A.A.Gonchar, "*The rate of approximation by rational fractions and the properties of functions*", (Russian), Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Moscow), 1966, Izdat. "Mir", Moscow, 1968, 329–356.
- [3] A.Levin, "*On the degree of complex rational approximation to real functions*", Constr. Approx. **2** (1986), 213–219.
- [4] K.N.Lungu, "*Best approximation by rational functions*", (Russian), Mat. Zametki **10** (1971), 11–15.
- [5] G.Meinardus, Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods, Springer-Verlag Inc., New York, 1967.
- [6] A.Ruttan, "*The length of the alternation set as a factor in determining when a best real rational approximation is also a best complex rational approximation*", J. Approx. Theory **31** (1981), 230–243.
- [7] A.Ruttan and R.S.Varga, "*Real vs. complex rational Chebyshev approximation on an interval: $\gamma_{m,m+2} \leq 1/3$* ", Rocky Mountain J. of Math. **19** (1989), 375–381.
- [8] —, "*A unified theory for real vs. complex rational Chebyshev approximation on an interval*", Trans. Amer. Math. Soc. **312** (1989), 681–697.
- [9] E.B.Saff and R.S.Varga, "*Nonuniqueness of best approximating complex rational functions*", Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 375–377.
- [10] —, "*Nonuniqueness of best complex rational approximations to real functions on real intervals*", J. Approx. Theory **23** (1978), 78–85.
- [11] L.N.Trefethen and M.H.Gutknecht, "*Real vs. complex rational Chebyshev approximation on an interval*", Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 555–561.
- [12] R.S.Varga, Topics in Polynomial and Rational Interpolation and Approximation, University of Montreal Press, Montreal, 1982.
- [13] J.L.Walsh, "*On approximation to an analytic function by rational functions of best approximations*", Math. Zeit. **38** (1934),

163-176.

- [14] J.L.Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, 5-th ed., Colloq. Publ. Vol.20, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.

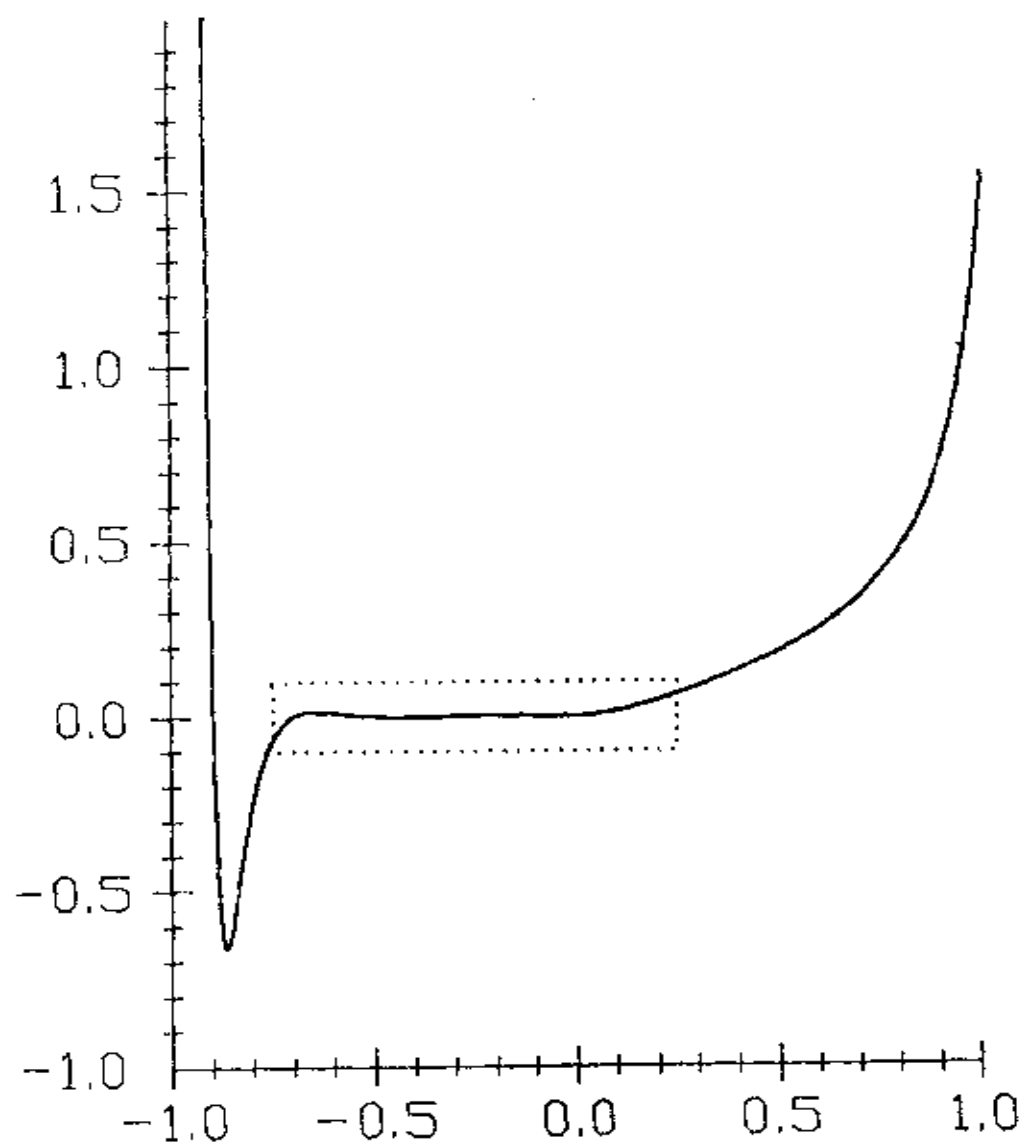


图 5.1 $\text{Re } h_{5,\epsilon}(x)$

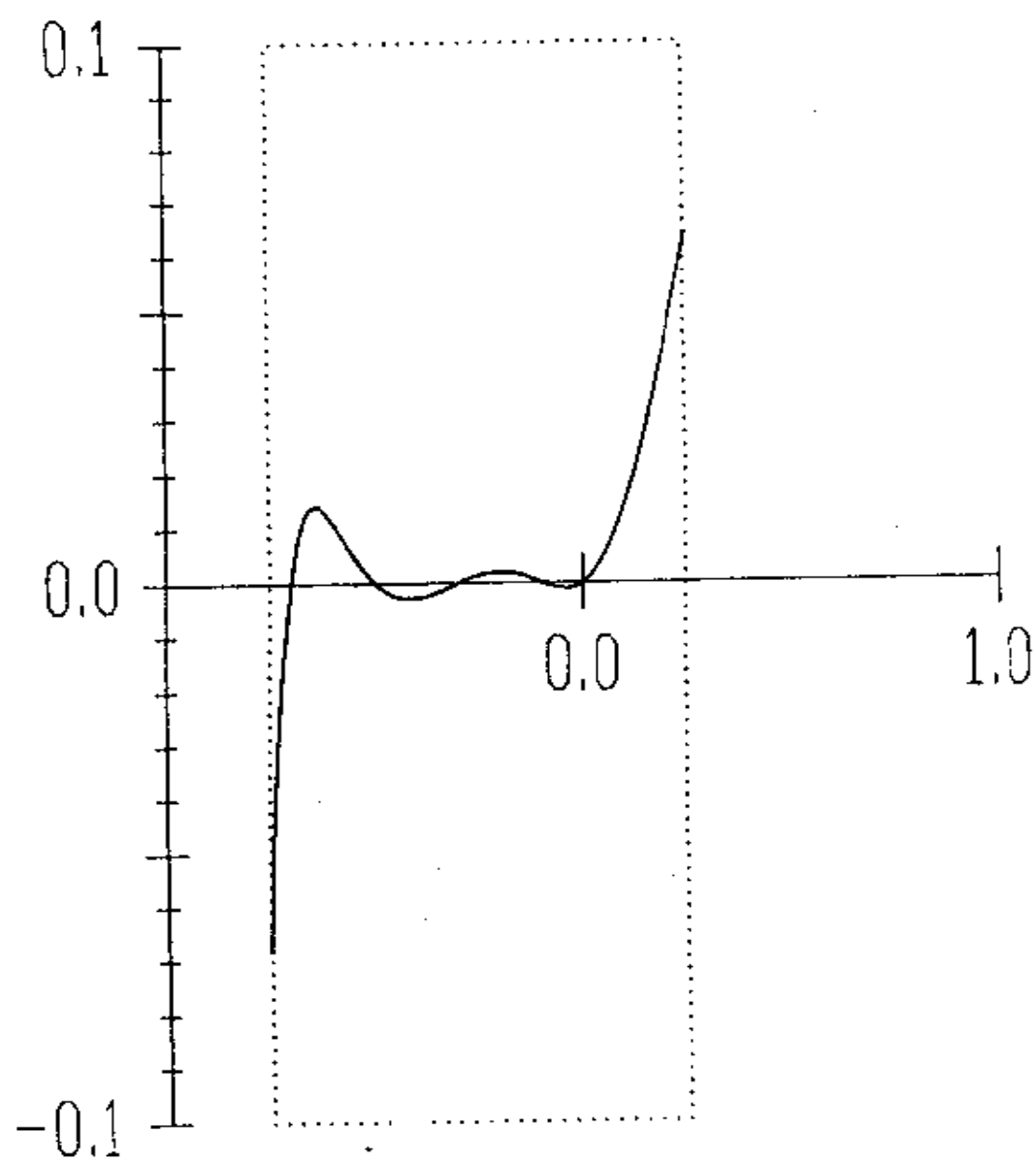


图 5.2 图 5.1 的放大部份

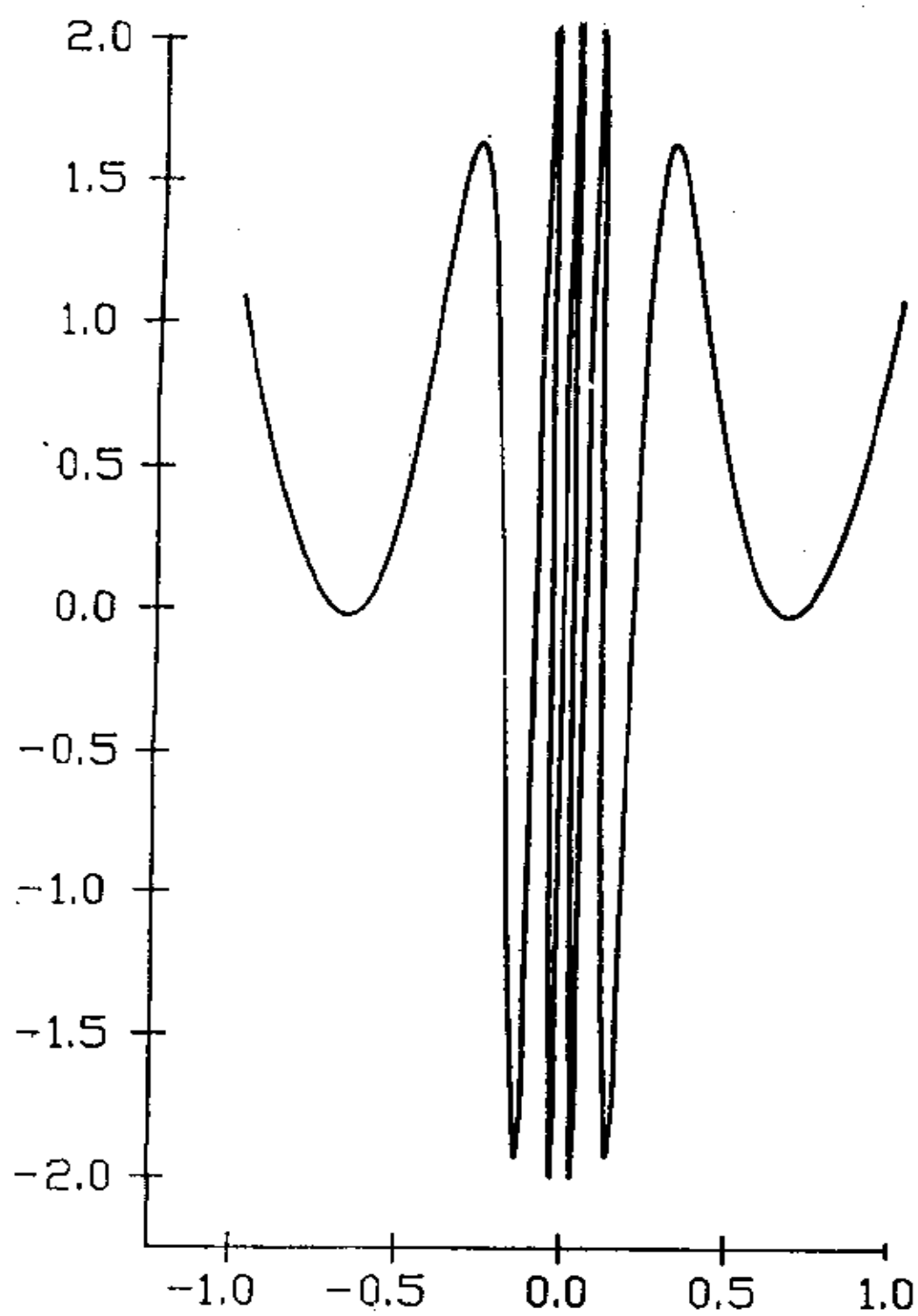


图 5.3 $2\text{Re } h_{2,5,\epsilon}(x)$

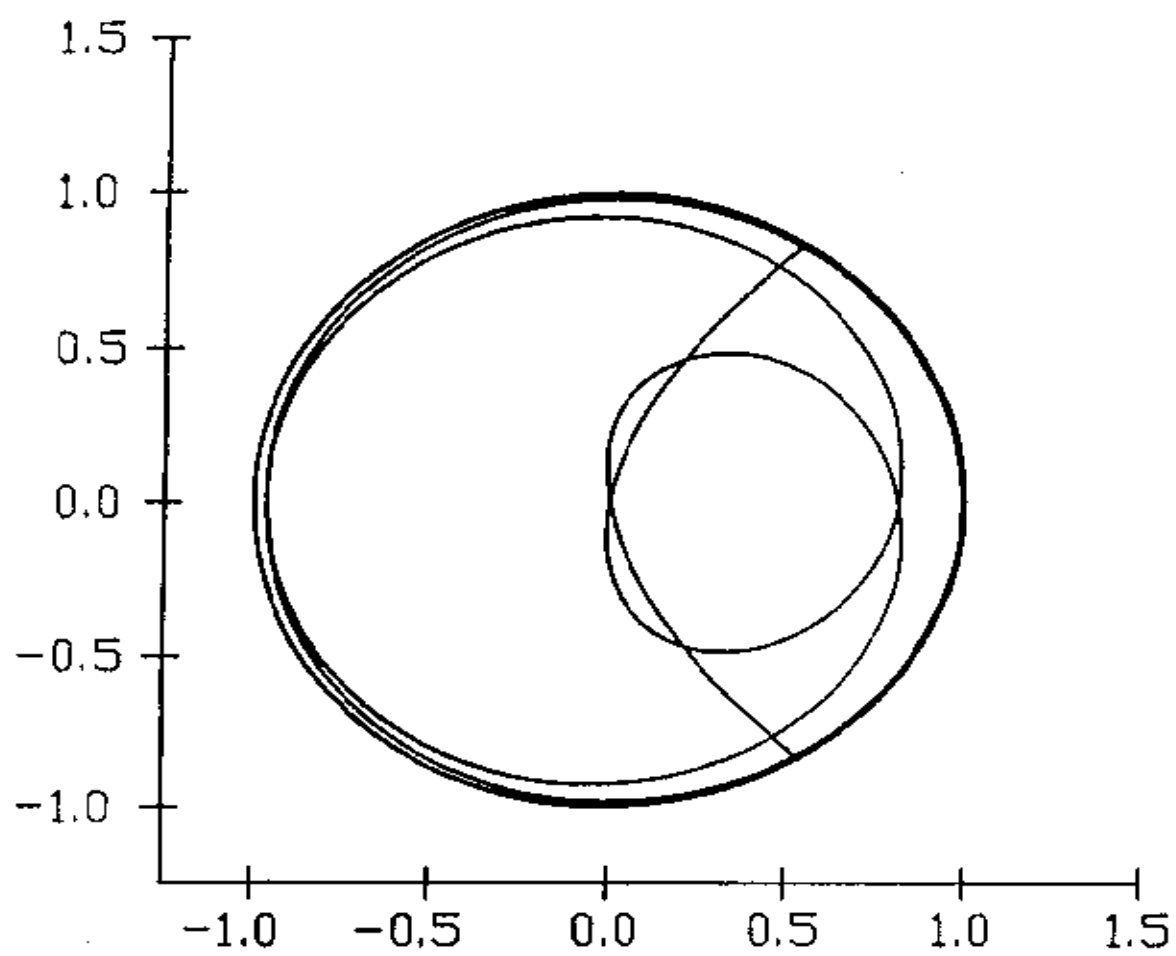


图 5.4 $\overline{h_{2,5,\varepsilon}(x)}$

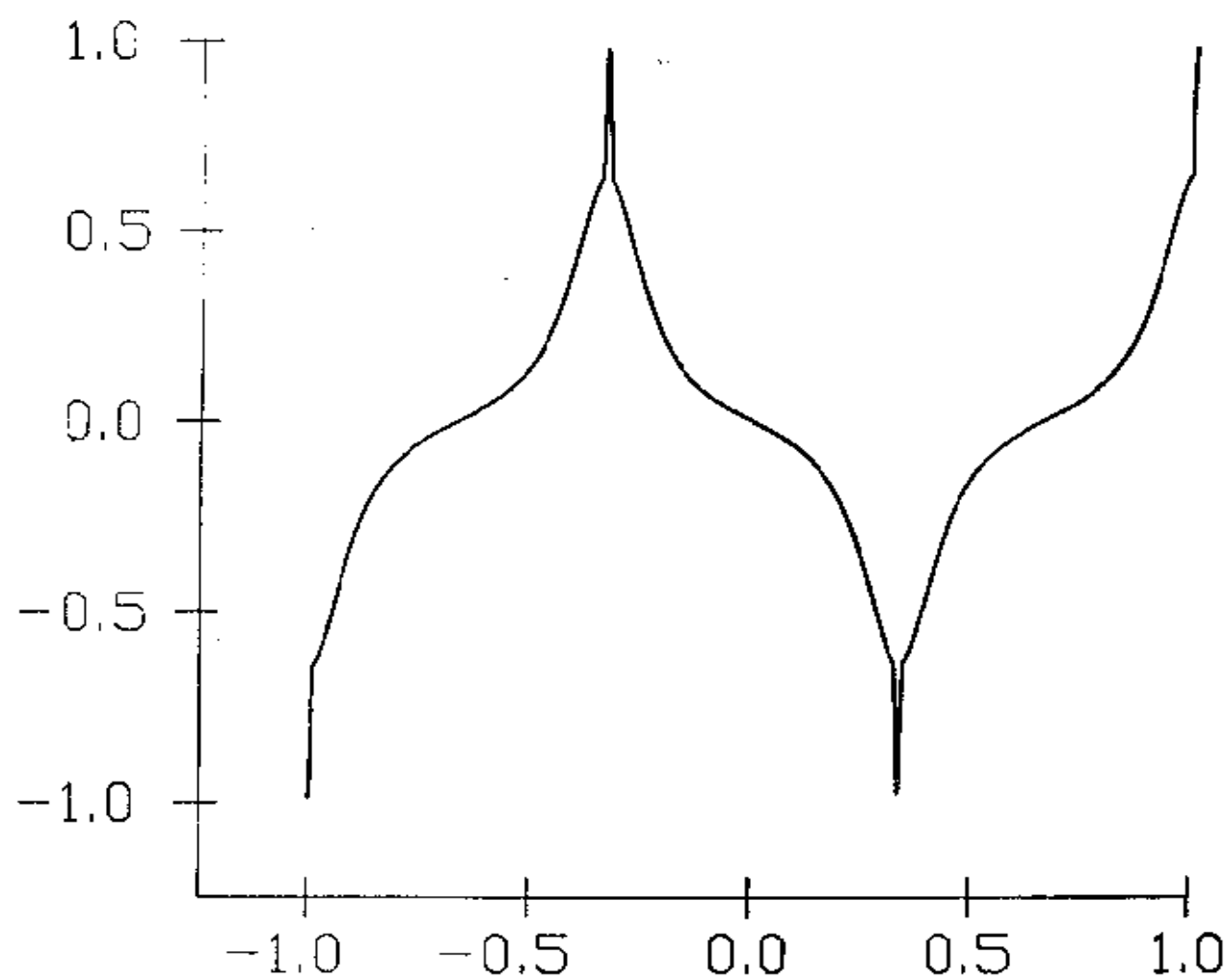


图 5.5 $S_{\epsilon,2}(x) + \operatorname{Re} h(x; \epsilon, 2)$

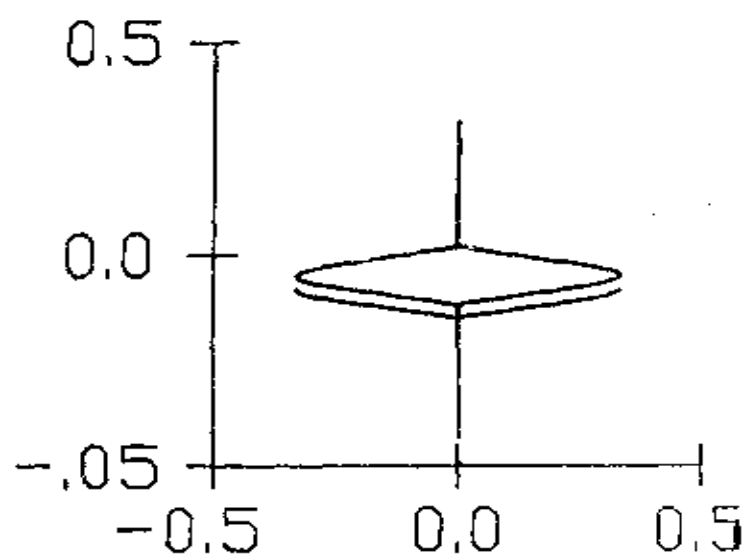


图 5.6 $S_{\epsilon,2} - i \operatorname{Im} h(x; \epsilon, 2)$

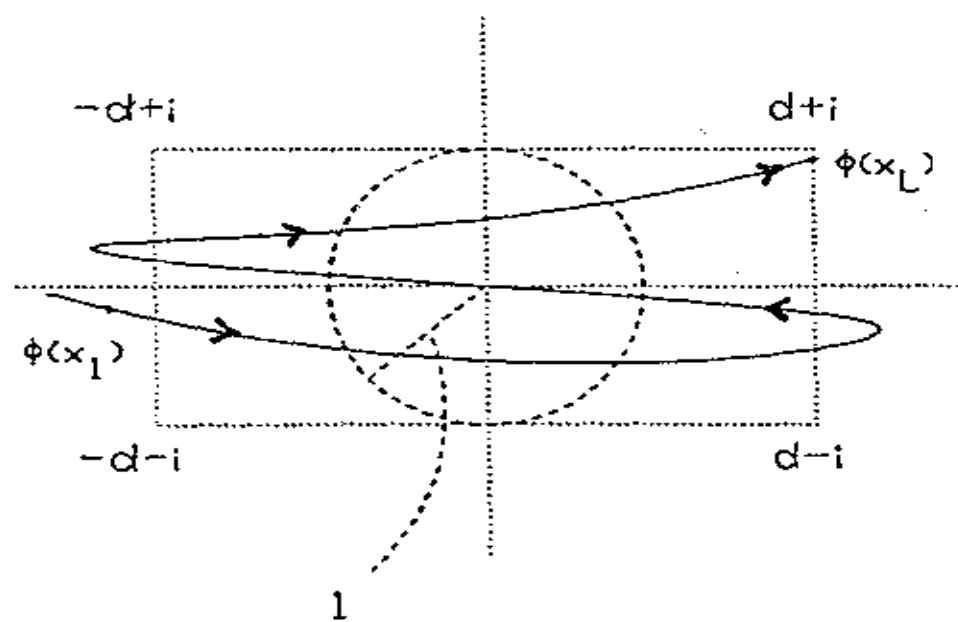


图 5.7 矩形 B

第六章 关于具有低阶占优多项式的广义 Jensen 不等式

6.1 低阶占优多项式

最近, B.Beauzamy 和 P.Enflo^[2] 介绍了一种新的概念, 即低阶占优多项式. 在这一章中, 我们将介绍这一概念应用于推广函数论中经典的 Jensen 不等式而得到的新结果. 值得一提的是, 许多这里讨论的结果都是利用符号计算的软件包 (如 MACSYMA) 的数值结果而得到的 (和 Beauzamy[3] 一样).

首先, 令 $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ 表示任意的复多项式 ($\neq 0$), 给定实数 $d \in (0, 1)$ 和非负整数 k , 若

$$\sum_{j=0}^k |a_j| \geq d \sum_{j=0}^m |a_j| \quad (1.1)$$

成立, 则称 $p(z)$ 具有 k 阶占优 d . (我们将在 §6.3 中看到, 这一概念将推广到不是多项式的函数上. 有关这方面的第一个成果为:

定理 1 (Beauzamy 和 Enflo[2], [3]) 给定任意的实数 $d \in (0, 1)$ 和非负整数 k , 令实数 $\tilde{C}_{d,k}$ (仅依赖于 d, k) 为

$$\tilde{C}_{d,k} := \sup_{1 < t < \infty} \left[t \log \left\{ \frac{2d}{(t-1) \left[\left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{k+1} - 1 \right]} \right\} \right], \quad (1.2)$$

则对任意满足 (1.1) 的多项式 $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j (\neq 0)$, 下式成立

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\theta})| d\theta - \log \left(\sum_{j=0}^m |a_j| \right) \geq \tilde{C}_{d,k}. \quad (1.3)$$

注: 定理 1 的重要性质是下界 $\tilde{C}_{d,k}$ 和 $p(z)$ 的阶无关.

证明 令 $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ 是满足 (1.1) 的任意多项式 ($\neq 0$). 不失一般性, 利用 $\sum_{j=0}^m |a_j| = 1$, 对 $p(z)$ 进行规范化, 这样从 (1.3) 可以证得,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\theta})| d\theta \geq \tilde{C}_{d,k}. \quad (1.3')$$

对于任意 $r, 0 < r < 1$, 由 Cauchy 公式得

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p(re^{i\theta}) d\theta}{r^j e^{ij\theta}} \quad (j = 0, 1, \dots, m),$$

由此, 取绝对值, 则可证得

$$\sum_{j=0}^k |a_j| \leq \max_{|z|=r} \{ |p(z)| \} \cdot \sum_{j=0}^k \frac{1}{r^j} = \max_{|z|=r} |p(z)| \cdot \left\{ \frac{1}{\frac{1}{r} - 1} \right\}. \quad (1.4)$$

因此可选择任意的 $z_0, |z_0| = r$, 使得 $|p(z_0)| = \max_{|z|=r} |p(z)|$. 注意由于 $p(z) \neq 0$, 所以 $|p(z_0)| > 0$. 其次, 令 $f(z)$ 为 $|z| \leq 1$ 中任意的解析函数, 且 $f(0) \neq 0$. 再令 $Z_\Delta(f)$ 是 $f(z)$ 在 $0 \leq |z| < 1$ 中的零点, 则由 Jensen 公式得出 (参见 Ahlfors[1], p207)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \sum_{z_j \in Z_\Delta(f)} \log \left(\frac{1}{|z_j|} \right). \quad (1.5)$$

由于 (1.5) 的最后项非负, 因此, 从 (1.5) 可得经典的 Jensen 不等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta \geq \log |f(0)|. \quad (1.5')$$

特别地, 利用给定的多项式 $p(z)$ 和 Möbius 函数 $w(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$, (它把圆盘 $|z| \leq 1$ 保形映射到圆盘 $|w| \leq 1$ 上). 令 $f(z) = p(w(z)) = p\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right)$, 它在 $|z| \leq 1$ 中解析, 且 $f(0) = p(z_0) \neq 0$. 则对 $f(z)$ 利用 Jensen 不等式 (1.5'), 直接得出

$$I := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| p\left(\frac{e^{i\theta} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\theta}}\right) \right| d\theta \geq \log |p(z_0)|. \quad (1.6)$$

再者, 利用变量变换 $e^{i\phi} = \left(\frac{e^{i\theta} + z_0}{1 + \bar{z}_0 e^{i\theta}} \right)$, 并经简单计算得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\phi})| \cdot \frac{e^{i\phi}(1-r^2)}{\{-\bar{z}_0 e^{2i\phi} + (1+r^2)e^{i\phi} - z_0\}} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\phi})| \cdot \frac{1-r^2}{|1-\bar{z}_0 e^{i\phi}|^2} d\phi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

对于在 (1.7) 中第一个积分中的第二个被积项, 我们有下界

$$\frac{1-r^2}{|1-\bar{z}_0 e^{i\phi}|^2} \geq \frac{1-r}{1+r} \quad (\text{所有实的 } \phi), \quad (1.7')$$

但是, 由于

$$|p(e^{i\phi})| = \left| \sum_{j=0}^m a_j e^{ij\phi} \right| \leq \sum_{j=0}^m |a_j| = 1,$$

则同一积分中的第一个被积项满足 $\log |p(e^{i\phi})| \leq 0$. 这样, 利用不等式 (1.7'), 我们有 I 的上界

$$I \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\phi})| d\phi. \quad (1.8)$$

联立不等式 (1.1) (在规范 $\sum_{j=0}^m |a_j| = 1$ 的意义下) 和 (1.4), (1.6), (1.8) 得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\phi})| d\phi \geq \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \log \left[\frac{d\left(\frac{1}{r} - 1\right)}{\frac{1}{r^{k+1}} - 1} \right] \quad (0 < r < 1),$$

并且, 利用变量变换 $t = \frac{1+r}{1-r}$, 上式变为 (参见 (1.2))

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\phi})| d\phi \geq t \log \left\{ \frac{2d}{(t-1) \left[\left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{k+1} - 1 \right]} \right\} =: f_{d,k}(t), \quad (1.9)$$

对于任意的 $A, 1 \leq t \leq \infty$, 显然, 在 $(1, +\infty)$ 上, $f_{d,k}(t)$ 是实值连续函数. 容易证明

$$\tilde{C}_{d,k} := \sup_{1 < t < \infty} f_{d,k}(t). \quad (1.10)$$

对于 $d(0 < d < 1)$ 和任意非负的整数 k , 上式是有限的. 这样, 由于不等式 (1.9) 对于 $t(0 < t < \infty)$ 成立, 所以对 (1.10) 的 $\tilde{C}_{d,k}$, 它也成立, 这就是要证明的结果 (1.3').

我们讨论 $k = 0$ 时的特殊情形, 来作为定理 1 的一个有趣的推论. 从 (1.9) 有 $f_{d,0}(t) = t \log d, 1 < t < \infty$, 使得

$$\tilde{C}_{d,0} := \sup_{1 < t < \infty} f_{d,0}(t) = \log d.$$

这样, 对于多项式 $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j (\neq 0), |a_0| = d \sum_{j=0}^m |a_j|$. 此时, 从 (1.3) 导出

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\theta})| d\theta \geq \log \left\{ d \cdot \sum_{j=0}^m |a_j| \right\} = \log |a_0|,$$

此即为 Jensen 不等式 (1.5'). 在此意义下, 定理 1 中的 (1.3) 可以被理解为一个广义的 Jensen 不等式.

正如 Beazamy 在 [3] 中所解释的那样, 我们可以求出 $f_{d,k}(t)$ 在 $t = 2$ 处的值 (参见 (1.9)), 从而得到 $\tilde{C}_{d,k}$ 的下界:

$$\tilde{C}_{d,k} \geq 2 \log \left\{ \frac{2d}{3^{k+1} - 1} \right\}, \quad (1.11)$$

其中, $0 < d < 1, k$ 为任意非负的整数.

在 [3] 中还提到, 对定理 1 的证明仅利用了较弱的假设, 即设 $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j (\neq 0)$ 满足

$$\sum_{j=0}^k |a_j| \geq d \text{ 和 } \|p\|_{L_\infty(\Delta)} := \sup\{|p(z)| : |z| \leq 1\} \leq 1, \quad (1.12)$$

并使得定理 1 的结论在这些假设下成立.

定理 1 中的不等式 (1.3) 是很重要的, 由它产生一个问题, 即如何求出 $C_{d,k}$ 的最大实数值, 使得 (1.3) 对任意满足 (1.1) 的多项式 $p(z) (\neq 0)$ 成立? 这样, 若我们引进泛函

$$J(p) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\theta})| d\theta - \log \left(\sum_{j=0}^m |a_j| \right), \quad (1.13)$$

则有

$$C_{d,k} := \inf \left\{ J(p) : p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j (\neq 0) \text{ 满足 (1.1)} \right\}. \quad (1.14)$$

另一个显然的问题是极值多项式的特性, 即, 满足 (1.1) 的多项式 $p(z)$ 是否使得 $C_{d,k} = J(p)$ 成立, 到撰写本书时, 此问题仍未解决.

现在考虑当 $d = \frac{1}{2}$ 时的特殊情形来作为一种说明, 对于每一正整数 k 和 $d = 1/2$, 特殊多项式 $(1+z)^{2k+1}$ 满足 (1.1) (等号成立). 进而, 由于 $(1+z)^{2k+1}$ 在 $|z| < 1$ 中没有零点, 则从 (1.13), (1.14) 和 Jensen 不等式 (1.5) 得出

$$J((1+z)^{2k+1}) = -(2k+1) \log 2 \geq C_{1/2,k} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.15)$$

就象在下一节中将要看到的那样, 事实上, 对于每一正整数 k , (1.15) 中最后一个不等式对于一大类多项式来说是不能改进的. 然而, 在 (1.15) 中的 $C_{1/2,k}$ 的上界和定理 1 中的 $\tilde{C}_{1/2,k}$ 的下界之间存在一个相当大的差. 特别地, 当 $k = 1$ 时的情形, $C_{1/2,1}$ 的上界 (1.15) 和下界 $\tilde{C}_{1/2,1}$ (可由 (1.10) 求出数值) 分别为

$$-2.07944 \dots \geq C_{1/2,1} \geq \tilde{C}_{1/2,1} = -3.69263 \dots, \quad (1.16)$$

6.2 关于 Herwitz 多项式的结果

在本节中, 我们描述在 [12] 中 (Rigler, Trimble 和 Varga) 所讨论关于 Jensen 不等式的 Beauzamy-Enflo 的推广的新结果. 这些结果可以从 Herwitz 多项式 H 中的特殊集合 (参见 Mardon[10], p181) 导出

的, 为此, 进行规范化,

$$H = \left\{ \begin{array}{l} f(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j : m \text{ 为任意非负的整数, } f(0) = 1, \\ \text{系数 } a_j (j = 0, 1, \dots, m) \text{ 为实的, 且 } f(z) \text{ 所有的零点落在} \\ \operatorname{Re} z < 0 \text{ 上.} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

与 (1.14) 类似, 对于任意的 $d (0 < d < 1)$ 和任意的非负整数 k , 令

$$C_{d,k}^H := \inf \{ J(f) : f(z) \in H \text{ 且 } f(z) \text{ 满足 (1.1)} \}, \quad (2.2)$$

其中, 在通常情况下从 (1.13) 和 Jensen 不等式 (1.5) 有

$$J(f) := \log \left\{ \frac{|a_0|}{\sum_{j=0}^m |a_j| \cdot \prod_{z_j \in Z_\Delta(f)} |z_j|} \right\}. \quad (2.3)$$

由于 H 是所有满足 (1.1) 的多项式的子集, 因此, 从 (1.14) 和 (2.2) 显然有

$$C_{d,k}^H \geq C_{d,k}, \quad (2.4)$$

由于 H 的元素具有特殊的结构, 因此从 [12] 中的结果可以证明:

(i) 所有的常数 $C_{d,k}^H$ 可以显式地求出; (ii) 可以求出 H 中所有的极值元素, 即 H 中使到下式成立的多项式 $q(z)$:

$$J(q) = C_{d,k}^H, \quad (2.5)$$

首先, 作为 (2.1) 的一个直接结果, 我们注意到, 如果 $f(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ 在 H 中, 且 ∂f 表示 $f(z)$ 的精确阶, 则

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } a_0 = 1, \quad a_j > 0 \text{ 对于 } j = 0, 1, \dots, \partial f; \\ \text{(ii) 若 } f(\rho) = 0; \text{ 其中 } \rho < 0, \text{ 则 } f(z) / \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \text{ 在 } H \text{ 中;} \\ \text{(iii) 若 } \rho < 0, \text{ 则 } f(z) \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \text{ 在 } H \text{ 中;} \\ \text{(iv) 若 } f(\rho) = 0 \text{ 其中 } \rho \text{ 非实的, 则 } f(z) / \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \left(1 - \frac{z}{\bar{\rho}}\right)\right] \text{ 在 } H \text{ 中.} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

其次, 若 $f(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ 是 H 中的一个元素, 则从 (2.6i) 得出 $f(1) =$

$\sum_{j=0}^m a_j = \sum_{j=0}^m |a_j|$, 由于从 (2.6i) 可得 $a_0 = 1$, 因此从 (2.3) 推导出

$$J(f) = -\log \left(f(1) \cdot \prod_{z_j \in Z_\Delta(f)} |z_j| \right) \quad (f(z) \in H). \quad (2.7)$$

对于任意 $f(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j (\neq 0)$, 我们容易定义

$$\delta_k(f) := \sum_{j=0}^k |a_j| / \sum_{j=0}^m |a_j| \quad (k = 0, 1, \dots, m). \quad (2.8)$$

注意到 $f(z)$ 存在 k 阶占优 d , 则 (参见 (1.1))

$$\delta_k(f) \geq d. \quad (2.9)$$

在证明本节主要结果定理 5 之前, 我们引入 [12] 中的三个引理. 首先引入引理 2, 其主要的结论 (2.10) 可从 Mahler[8] 中找到, 我们注意到 [12] 中讨论了 (2.10) 中等式成立时的情况 (相关的结果可见 Mahler[9]).

引理 2 ([12], Mahler[8]) 考虑任意复多项式 $f(z) = \sum_{j=N}^m a_j z^j$, 其中 $a_N a_m \neq 0$, 则 (参见 (1.13))

$$J(f) \geq -m \log 2, \quad (2.10)$$

等式仅当 $N = 0, f(z) = \gamma(e^{i\psi} + z)^m$ 时成立, 其中 $\gamma \neq 0, \psi$ 为实的.

证明 从泛函 $J(z)$ 的一般表示式 (2.3) 可以容易验证, 对于任意多项式 $g(z)$ 和 $h(z)$, 其中 $g(0) \cdot h(0) \neq 0$, 则有

$$J(gh) \geq J(g) + J(h).$$

不失一般性, 考虑任意首一复多项式

$$f(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j = \prod_{j=0}^m (z + \varphi_j), |\varphi_j| > 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

对 f 归纳地利用上述推广的不等式, 可得

$$J(f) \geq \sum_{j=1}^m J(z + \varphi_j). \quad (2.10')$$

现在, 若 $|z_j| \geq 1$, 则得 $J(z + \varphi_j) = \log(|\varphi_j|/(1+|\varphi_j|)) \geq -\log 2$. 后一不等式是从 $u/(1+u)$ 对于 $u \geq 1$ 时的单调性推出的. 若 $0 < |\varphi_j| < 1$, 类似地, 从 (2.3) 得出 $J(z + \varphi_j) = \log\left(\frac{1}{(1+|\varphi_j|)}\right) \geq -\log 2$. 对于 (2.10'), 利用这些不等式得出

$$J(f) \geq -m \log 2.$$

此即为 (2.10). 在 [12] 中也讨论了 (2.10) 不等式的情形.

引理 3^[12] 令 k 为一正整数, 考虑 H 中的任意元素 f , 其中 $\partial f = m \geq k+1$. 设 z_1 和 z_2 是 $f(z)$ 的两个零点 (两个零点不一定不同), 那么, 除非 z_1 和 z_2 都是实的, 且 $z_1 = -1, z_2 \leq -1$ (或者 $z_2 = -1, z_1 \leq -1$), 则在 H 中存在 $h(z)$, $\partial h = m$, 使得

$$J(f) > J(h) \quad (2.11)$$

及 (参见 (2.8))

$$\delta_k(h) > \delta_k(f). \quad (2.12)$$

证明 首先, 设 $\operatorname{Im} z_1$ 和 $\operatorname{Im} z_2$ 至少有一个不等于零, 不妨设为 $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. 从 $f(z)$ 是 H 的元素假设可推出 (参见 (2.1)), \bar{z}_1 也是 $f(z)$ 的零点. 我们选取 $z_2 = \bar{z}_1$, 令多项式 $g(z)$ 和 $h(z)$ 定义如下:

$$g(z) := \frac{f(z)}{\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar{z}_1}\right)}, \quad h(z) := \left(1 + \frac{z}{\rho}\right)^2 g(z), \quad (2.13)$$

其中 $\rho > 1$. 从 (2.6) 可证 $g(z)$ 和 $h(z)$ 都在 H 中.

由于 $\partial f = m$, 从 (2.13) 可得 $g(z) = \sum_{j=0}^{m-2} b_j z^j$. 此外, 从 (2.6iv)

可知, $g(z) \in H$, $\partial g = m-2$. 因此, 我们有 (参见 (2.6i)), $b_j > 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m-2$). 注意到从假设 $m \geq k+1$ 可得 $b_{k-1} > 0$. 经简单计

算得出

$$\delta_k(f) = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} b_j + [(|z_1|^2 b_k - b_{k-1})/|1 - z_1|^2] \right\} / g(1)$$

和

$$\delta_k(h) = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} b_j + [(\rho^2 b_k - b_{k-1})/(1 + \rho)^2] \right\} / g(1).$$

因此, $\delta_k(h) > \delta_k(f)$ 当且仅当

$$b_{k-1} \left[\frac{1}{|1 - z_1|^2} - \frac{1}{(1 + \rho)^2} \right] > b_k \left[\frac{|z_1|^2}{|1 - z_1|^2} - \frac{\rho^2}{(1 + \rho)^2} \right]. \quad (2.14)$$

令 $Z_\Delta(f)$ 表示 $f(z)$ 的模小于 1 的零点的集合, $Z' = Z_\Delta(f) \setminus \{z_1; \bar{z}_2\}$, 则从 (2.7) 和 (2.13) 可得

$$J(f) = \log \left[\frac{\max\{|z_1|^2; 1\}}{g(1)|1 - z_1|^2 \prod_{\zeta \in Z'} |\zeta|} \right],$$

$$J(h) = \log \left[\frac{\rho^2}{g(1)(1 + \rho^2) \prod_{\zeta \in Z'} |\zeta|} \right].$$

这样, $J(f) > J(h)$ 当且仅当

$$\frac{\max\{|z_1|; 1\}}{|1 - z_1|} > \frac{\rho}{1 + \rho}. \quad (2.15)$$

若 $|z_1| < 1$, 因为 $\operatorname{Re} z_1 < 0$, 则可得 $1/2 < \frac{1}{|1 - z_1|} < 1$, 因此存在 $\rho > 1$ 使得

$$\frac{1}{|1 - z_1|} > \frac{\rho}{1 + \rho} > \frac{|z_1|}{|1 - z_1|}. \quad (2.16)$$

从 (2.16) 的第一不等式可推出 (2.15) 成立. 因 $\rho > 1$, 也有 $1/|1 - z_1| > 1/(1 + \rho)$. 这样, (2.14) 中的乘项 b_{k-1} 是正的. 另一方面, 从 (2.16) 的最后一个多项式得出 (2.14) 的乘项 b_k 是负的. 因为显然有 $b_{k-1} > 0$,

且从 (2.6i) 可得 $b_k \geq 0$, 因此 (2.14) 也成立. 这样就证明了在这种情况下引理 3 中的 (2.11) 和 (2.12) 也成立.

若 $|z_1| \geq 1$, 则 $1/2 < (|z_1|/|1 - z_1|) < 1$, 这是由于 $\operatorname{Re} z_1 < 0$ 且 $z_1 \neq -1$. 因此, 存在 $\rho_1 > 1$ 使得

$$\frac{|z_1|}{|1 - z_1|} = \frac{\rho_1}{1 + \rho_1}.$$

这样有 $1 + 1/\rho_1 = |1 - 1/z_1| < 1 + 1/|z_1|$. 从而推出 $\rho_1 > |z_1|$, 以及 $\frac{1}{|1 - z_1|} > \frac{1}{(1 + \rho_1)}$. 因此, 若 $\rho = \rho_1$, 则 (2.14) 的右边为零, 左边为正. 由连续性可知, 存在某一 $\rho \in (1, \rho_1)$ 使得 (2.14) 和 (2.15) 都成立. 因而, 在 $z_1 (\operatorname{Im} z_1 \neq 0)$ 是 $f(z)$ 的零点的假设下, 可以推出, 在 H 中存在一个 $h(z)$, 满足引理 3 中的 (2.11) 和 (2.12).

现设 $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0$, 我们考虑如下三种情况. 第一, 假设 z_1 和 z_2 有一个落在开区间 $(-1, 0)$ 上, 不妨设为 $-1 < z_1 < 0$. 重新定义 $g(z)$ 和 $h(z)$ 如下:

$$g(z) = \frac{f(z)}{(1 - z/z_1)} \quad (\text{或者写为 } g(z) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j z^j),$$

$$h(z) = (1 + z)g(z).$$

且经类似于推导 (2.14) 所进行的计算而得到

$$\delta_k(f) = \left[\sum_{j=0}^{k-1} b_j - z_1 b_k / (1 - z_1) \right] / g(1),$$

$$\delta_k(h) = \left[\sum_{j=0}^{k-1} b_j + b_k / 2 \right] / g(1).$$

此时, 我们也有 $b_k > 0$. 这样, $\delta_k(h) > \delta_k(f)$ 当且仅当 $\frac{1}{2} > \frac{z_1}{(1 - z_1)}$ (对于 $z_1 \in (-1, 0)$, 总成立). 重新定义 $Z' = Z_\Delta(f) \setminus \{z_1\}$. 由 (2.7) 和

$g(z)$, $h(z)$ 的新定义可得

$$J(f) = \log \left[\frac{1}{g(1)(1-z_1) \prod_{\zeta \in Z'} |\zeta|} \right],$$

$$J(h) = \log \left[\frac{1}{2g(1) \prod_{\zeta \in Z'} |\zeta|} \right].$$

这样, $J(f) > J(h)$ 当且仅当 $\frac{1}{(1-z_1)} > \frac{1}{2}$ 时成立, 显然后者必定成立. 第一种情况证明完毕.

第二, 假设 $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0$, 且 z_1 和 z_2 都落在区间 $(-\infty, -1)$ 上. 此外, 再设

$$1 - z_1 - z_2 - z_1 z_2 \geq 0. \quad (2.17)$$

重新定义 $g(z)$ 和 $h(z)$ 如下:

$$g(z) := \frac{f(z)}{\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right)} \quad \left(\text{或写为 } g(z) = \sum_{j=0}^{m-2} b_j z^j\right),$$

$$h(z) := (1+z)\left(1 + \frac{z}{\rho}\right)g(z), \quad \rho > 1.$$

和推导 (2.14) 时一样, $\delta_k(h) > \delta_k(f)$ 当且仅当

$$b_{k-1} \left[\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{1}{2(1+\rho)} \right] > b_k \left[\frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{\rho}{2(1+\rho)} \right]. \quad (2.18)$$

和推导 (2.15) 时一样, $J(f) > J(h)$ 当且仅当

$$\frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} > \frac{\rho}{2(1+\rho)}. \quad (2.19)$$

若 (2.17) 中的等式成立, 则 (2.19) 的左端等于 $\frac{1}{2}$, 且 (2.19) 对于 $\rho \geq 1$ 成立. 进而, 由于 (2.18) 的乘项 b_k 是正的, 且当 $\rho \rightarrow \infty$ 时趋于零. 此时, 类似地, 我们也有 $b_{k-1} > 0$. 因此, 可选取充分大的 $\rho > 1$, 使得 (2.18) 中的等式成立.

第三, 设 (2.17) 中的严格不等式成立, 且由于 z_1 和 z_2 落在 $(-\infty, -1)$ 上, 因此有

$$\frac{1}{4} < \frac{z_1 z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} < \frac{1}{2}.$$

从而, 存在 $\rho_2 > 1$, 使得

$$\frac{z_1 z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} = \frac{\rho_2}{2(1 + \rho_2)}.$$

反之, 可推得

$$\frac{1}{2(1 + \rho_2)} = \frac{2 - (z_1 + 1)(z_2 + 1)}{2(1 - z_1)(1 - z_2)} < \frac{1}{(1 - z_1)(1 - z_2)}.$$

所以, 若 $\rho = \rho_2$, 则 (2.18) 的右端等于零. 并且, 由于 $b_{k-1} > 0$, 可得, 当 $\rho = \rho_2$ 时, (2.18) 左端为正. 由连续性可知, 在区间 $(1, \rho_2)$ 中存在某一 ρ , 使得 (2.18) 和 (2.19) 都成立. 再者, 这蕴涵着, 在 H 中存在一个 $h(z)$, 它满足引理 3 中的 (2.11) 和 (2.12).

最后, 设 $\text{Im} z_1 = \text{Im} z_2 = 0$, 且 z_1 和 z_2 都落在 $(-\infty, -1)$ 上, 但 (2.17) 不成立. 若 $g(z)$ 定义如上述, $h(z)$ 重新定义为 $h(z) = (1 + z/\rho)g(z)$, 其中 $\rho > 1$, 则 $\delta_k(h) > \delta_k(f)$ 当且仅当

$$\frac{b_{k-1}}{(1 - z_1)(1 - z_2)} > b_k \left[\frac{z_1 z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} - \frac{\rho}{1 + \rho} \right], \quad (2.20)$$

且 $J(f) > J(f)$ 当且仅当

$$\frac{z_1 z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} > \frac{\rho}{1 + \rho}. \quad (2.21)$$

由于 (2.17) 不成立, 因此 $1/2 < \frac{z_1 z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} < 1$. 这样, 存在一个 $\rho_3 > 1$ 使得

$$\frac{z_1 z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)} = \frac{\rho_3}{1 + \rho_3}.$$

由连续性可知, 在 $(1, \rho_3)$ 上存在一个 ρ , 使得 (2.20) 和 (2.21) 都成立. 因此, 在 H 中存在一个 $h(z)$ 满足引理 3 中的 (2.11) 和 (2.12) \square

有趣的是, 在 [12] 中引理 3 的证明同样是利用了 MACSYM 的计算实验, 其中, $p(z)$ 为 H 中满足占优约束 (1.1) 的多项式, 其复零点被成对地移动以减少 (1.13) 中的泛函 $J(p)$, 而且它仍然满足约束 (1.1).

引理 4^[12] 给定 $(0, 1)$ 上的任意 d 和任意非负整数 k , 存在依赖于 d 和 k 的唯一正整数 n , 使得

$$\frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \leq d < \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^k \binom{n-1}{j}. \quad (2.22)$$

因此, 若 $\hat{\rho}$ 定义如下

$$\hat{\rho} := \frac{\binom{n-1}{k}}{\sum_{j=0}^k \binom{n-1}{j} - d2^{n-1}} - 1, \quad (2.23)$$

则 $\hat{\rho} > 1$.

证明 给定任意非负整数 k , 考虑正实数序列

$$\left\{ \frac{1}{2^l} \sum_{j=0}^k \binom{l}{j} \right\}_{l=k}^{\infty}, \quad (2.24)$$

其首项为 1. 我们将证明此序列严格递减, 且极限为零. 为此, 令

$$a_l := \frac{1}{2^l} \sum_{j=0}^k \binom{l}{j} \quad (l = k, k+1, \dots). \quad (2.25)$$

由于

$$\binom{l+1}{j} = \binom{l}{j} + \binom{l}{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad (2.26)$$

因此, 从 (2.25) 可推出

$$a_{l+1} = a_l - \frac{1}{2^{l+1}} \binom{l}{k} \quad (l = k, k+1, \dots),$$

这就证明了 (2.24) 是严格递减的. 其次, 作为中心极限定理的一个结果 (参见 Patel 和 Read[11], p.169-170), 我们有

$$\left| a_l - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(2k+1-l)/\sqrt{l}} e^{-t^2/2} dt \right| < \frac{0.28}{\sqrt{l}}. \quad (2.27)$$

对于所有 $l \geq \max\{k; 1\}$, 当 k 固定时, 从 (2.17) 推出 $a_l \rightarrow 0 (l \rightarrow \infty)$ (此式容易证明, 只要注意到, 从 (2.25) 可直接推出, 对 $l > 2k$, 有

$$0 < a_l < \frac{(k+1)l^k}{k!2^l},$$

且由于 k 是固定的, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, a_l 的上界显然趋于零).

因此, 对于给定的 $d \in (0, 1)$, 从 (2.25) 中 a_l 的严格递减的性质推出, 存在唯一的正整数 $n, n \geq k+1$, 使得 (2.22) 成立. 所以, 从 (2.22) 和 (2.26) 直接推出, 由 (2.23) 定义的 $\hat{\rho}$ 满足 $\hat{\rho} \geq 1$. \square

现在, 我们讨论本节的主要结果.

定理 5^[12] 给定 $d \in (0, 1)$ 和任意的正整数 k , 令 n 和 $\hat{\rho}$ (唯一地) 由 (2.22) 和 (2.23) 定义, 则有 (参见 (2.2))

$$C_{d,k}^H = \log \left[\frac{\hat{\rho}}{(\hat{\rho}+1)2^{n-1}} \right]. \quad (2.28)$$

进而, 置 $Q_{n,\hat{\rho}}(z) = \left(1 + \frac{z}{\hat{\rho}}\right)(1+z)^{n-1}$ 是 H 的一个元素, 则 H 中满足 (1.1) 的 $f(z)$ 是 H 的极元素 (即 $J(f) = C_{d,k}^H$) 当且仅当 $f(z) = Q_{n,\hat{\rho}}(z)$ 成立.

证明 给定 $d \in (0, 1)$ 和正整数 k , 令正整数 n 和实数 $\hat{\rho} (\hat{\rho} \geq 1)$ 由引理 4 中的 (2.22) 和 (2.23) 唯一地确定, 则多项式 $Q_{n,\hat{\rho}}(z) = \left(1 + \frac{z}{\hat{\rho}}\right)(1+z)^{n-1}$ 是 H 的元素, 且可以证明它满足

$$\delta_k(Q_{n,\hat{\rho}}) = d \text{ 和 } J(Q_{n,\hat{\rho}}) = \log \left[\frac{\hat{\rho}}{(\hat{\rho}+1)2^{n-1}} \right]. \quad (2.29)$$

从定义 (参见 (2.2)) 和 (2.29) 推出

$$J(Q_{n,\hat{\rho}}) = \log \left[\frac{\hat{\rho}}{(\hat{\rho}+1)2^{n-1}} \right] \geq C_{d,k}^H. \quad (2.30)$$

从引理 2 可知, 我们没有必要考虑 H 中阶低于 n 的多项式, 这是因为, $\log(\rho/((\rho+1)2^{n-1}))$ 作为 $\rho \geq 1$ 的一个函数是严格递增的, 而且其上界为 $-(n-1)\log 2$. 从 (2.22) 中的 n 的定义可以推出 (参见 (2.24)), $n \geq k+1$. 因此, 从引理可知, 我们只须考虑 $f(z) = (1+z/\rho)(1+z)^{m-1}$, 这里 $m \geq n, \rho \geq 1$. 由于 $f(z)$ 必须满足 (1.1), 因此可以证明 $m \leq n$,

且若 $m = n$, 则 $\hat{\rho} \leq \rho$, 其中 $\hat{\rho}$ 由 (2.23) 定义. 对于 (2.7) 进行计算得出

$$J\left(\left(1 + \frac{z}{\rho}\right)(1+z)^{n-1}\right) = \log\left\{\frac{\rho}{(1+\rho)2^{n-1}}\right\}. \quad (2.31)$$

但 (2.31) 的右边对于 $\rho \geq \hat{\rho}$ 是严格递增的. 因此, 为了取其极小值, 必须取 $\rho = \hat{\rho}$. 这样推出

$$\begin{aligned} \inf\{J(f) : f(z) \in H, f(z) \text{ 满足(1.1)}\} \\ = J(Q_{n,\hat{\rho}}) = C_{d,k}^H, \end{aligned} \quad (2.32)$$

且 $Q_{n,\hat{\rho}}(z)$ 是 H 中唯一满足 $J(Q_{n,\hat{\rho}}) = C_{d,k}^H$ 的元素.

最后, 我们认为, 大量的数值实验已经表明 (2.4) 中的等式成立. 因此, 可作如下猜想:

猜想 (Rigler, Trimble 和 Varga[12]):

$$C_{d,k}^H \stackrel{?}{=} C_{d,k}, \text{ 对于 } 0 < d < 1 \text{ 和 } k = 0, 1, \dots. \quad (2.33)$$

6.3 推广和评注

由于 6.1 和 6.2 节中有关多项式的结果对所考虑的多项式的阶数并不加以限制, 因此, 毫不奇怪, 这些结果都可以不加改变地推广到某一零阶整函数上 (参见 Boas[5]). 如 [12] 中所述, 定理 5 实际上对集合

$$\begin{aligned} \tilde{H} := \left\{ f(z) = \prod_{j=1}^{\omega} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) \text{ (其中 } \omega \leq \infty) : z_k \in \{z_j\}_{j=1}^{\omega} \right. \\ \left. \Rightarrow \operatorname{Re} z_k < 0, \bar{z}_k \in \{z_j\}_{j=1}^{\omega}, \text{ 且 } \sum_{j=1}^{\omega} \frac{1}{|z_j|} < \infty \right\} \end{aligned}$$

中的所有元素均成立. 注意到, (2.1) 中的集合 H 作为 \tilde{H} 的真子集而被包含在其中.

另一方面, 为了推广到单位闭圆盘 $|z| \leq 1$ 上的解析函数以外, 令 $f(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ 在 $|z| < 1$ 上解析, 且置

$$M_{\infty}(r; f) := \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|, \text{ 对于 } 0 \leq r < 1. \quad (3.1)$$

如通常一样, Hardy 空间 H^∞ 定义为 (见 Duren[7] p2)

$$H^\infty = \{g(z) : g(z) \text{ 在 } |z| < 1 \text{ 中解析且} \\ M_\infty(r; g) \text{ 当 } r \rightarrow 1^- \text{ 时, 有界}\}. \quad (3.2)$$

对于在 $|z| < 1$ 上解析的函数 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, 我们考虑, (1.1) 对于具有 k 阶占优 d 的 $f(z)$ 适用性. 为了使之有意义, 我们必须有 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, 使得 (参见 (3.1))

$$M_\infty(r; f) \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| r^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty;$$

因此, 从 (3.2) 可得 $f(z) \in H^\infty$. 这样我们就证明了, 利用函数 $\hat{f}(e^{i\theta})$, H^∞ 中任意的 $f(z)$ 也可以延拓到边界 $|z| = 1$ 上, 其中 $\hat{f}(e^{i\theta})$ 定义在 $[0, 2\pi]$ 中, 且有

$$\begin{cases} \hat{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) \text{ 在 } [0, 2\pi] \text{ 中几乎处处成立.} \\ \hat{f}(e^{i\theta}) \in L^\infty[0, 2\pi]; \\ \text{若 } f(z) \not\equiv 0, \text{ 则 } \log |\hat{f}(e^{i\theta})| \in L^1[0, 2\pi]. \end{cases} \quad (3.3)$$

这样, 对于任意的 $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j (\not\equiv 0)$, 其中 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 上解析且 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$, 我们有, $f(z) \in H^\infty$, 而且类似于 (1.13) 的泛函

$$\hat{J}(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\hat{f}(e^{i\theta})| d\theta - \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right), \quad (3.4)$$

是有意义和有限的. 因此, 我们有 (3.4) 中的 $\hat{J}(f)$ 的相应的极小化问题, $f(z) \in H^\infty$ 且 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \geq d \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$. 当 $0 < d < 1, k = 0$ 时, 上

述极小化问题成立当且仅当 $|a_0| = d \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ 且 $f(z)$ 为其自身外函数 (参见 Rudin[13] p.338).

多项式 $p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ 具有 k 阶占优的 d 的概念, 即

$$\sum_{j=0}^k |a_j| \geq d \sum_{j=0}^m |a_j|, \quad (3.5)$$

可以很容易推广, 因为, 上述方程中所涉及到的是系数向量 (a_0, a_1, \dots, a_m) 的 l_1 -范数及其 k -约束 $(a_0, a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots, 0)^T$ 的 l_1 -范数. 显然, 我们可以改为考虑 (3.5) 中 l_q -范数, 即

$$\left(\sum_{j=0}^k |a_j|^q \right)^{1/q} \geq d \left(\sum_{j=0}^m |a_j|^q \right)^{1/q} \quad (1 \leq q \leq \infty), \quad (3.6)$$

以及相应的极小化问题. 或者我们甚至可以考虑混合范数 (参见 (1.12)), 例如

$$\left(\sum_{j=0}^k |a_j|^q \right)^{1/q} \geq d \|p(z)\|_{L^\infty(\Delta)} \quad (1 \leq q \leq \infty), \quad (3.7)$$

及其相应的极小化问题. 此推广已在 Beuzamy[4] 和 Bonvalot[6] 作了阐述.

其次, 对于给定的 $d, 0 < d < 1$, 和非负整数 k , 我们注意到, 存在多项式 $p(z)$. 它不属于 H , 但满足 (1.1) 和

$$J(p) = C_{d,k}^H. \quad (3.8)$$

作为一个简单的例子, 在定理 5 中我们考虑特殊的立方多项式

$$Q_{n,1}(z) := (1+z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + z^3. \quad (3.9)$$

对于 $d = \frac{1}{2}$ 和 $k = 1$, 它是 H 中的元素且满足 (1.1)(等号成立). 从定理 5 的 (2.28) 可得

$$J(Q_{n,1}) = -3 \log 2 = C_{1/2,1}^H. \quad (3.10)$$

另一方面, 考虑 5 阶多项式

$$p_5(z) := (1+z)^3(4-z^2) = 4 + 12z + 11z^2 + z^3 - 3z^4 - z^5, \quad (3.11)$$

由于 $p_5(z)$ 在 $\operatorname{Re} z > 0$ 中有一零点, 因此它不是 (2.1) 的 H 中的元素. 然而, 对于 $d = \frac{1}{2}$, $k = 1$, $p_5(z)$ 也满足 (1.1)(等号成立). 另外, 利用 (2.5) 可得, $p_5(z)$ 还满足

$$J(p_5) = -3 \log 2 = C_{1/2,1}^H. \quad (3.12)$$

这蕴涵着, 若猜测 (2.33) 成立, 即 $C_{d,k}^H = C_{d,k}$, 则极多项式 $p(z)$ 满足 $J(p) = C_{d,k}$ 且不一定被唯一地确定, 这与定理 5 矛盾.

最后, 为了说明 MACSYMA 在本章中的应用, 我们给出图例 6.1 和 6.2, 并进行如下讨论. 特别选取 (3.11) 的 $p_5(z)$, 并变更其单重零点 $+2$, 同时使得对于 $d = \frac{1}{2}$ 和 $k = 1$, $p_5(z)$ 满足约束 (1.1). 这样, 我们考虑多项式

$$P_\mu(z) := \{(1+z)^3(2+z)\}(\mu-z), \quad (3.13)$$

其中 μ 是一复参数, 初值为 $+2$, $P_\mu(z)$ 满足约束 $\delta_1(P_\mu) = \frac{1}{2}$ (参见 (2.8)). 因此, 可以证明, 在复平面上存在一个简单的闭曲线 Γ , 它通过点 $\mu = 2$, 其中 Γ 定义为

$$\Gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : \delta_1(P_\mu) = 1/2\}. \quad (3.14)$$

由于 (3.13) 中的乘项 $h(z) = \{(1+z)^3(2+z)\}$ 满足 $\delta_1(h) = 3/8 < \frac{1}{2}$. 我们注意到, 曲线 Γ 不能延拓到无穷处.

在图 6.1 中, 我们画出曲线 Γ , 可以证明

$$\min\{J(P_\mu) : \mu \in \Gamma\} = J(P_2) = -3 \log 2 \quad (3.15)$$

成立, 更精确地, 仅当 $\mu = 2$ 时, $J(P_\mu)$ 在 Γ 上取到极小值. 这样, 当走遍曲线 Γ 时, 可得到一多项式序列 $P_\mu(z)$, 且满足 $\delta(P_\mu) = \frac{1}{2}$. 但与 (3.12) 相比, 这一多项式序列相应的泛函 J 的极小化问题并没有得到改进.

我们也可以取 (3.11) 中的多项式 $p_5(z)$, 并变更其单重零点 -2 , 同时它满足约束 $\delta_1(\tilde{P}_\mu) = \frac{1}{2}$, 其中 $\tilde{P}_\mu(z) = \{(1+z)^3(2-z)\}(-\bar{\mu}+z)$. $\bar{\mu}$

是复参数, 初值为 -2 . 同样给出 一简单闭曲线 $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\mu} \in \mathbb{C} : \delta_1(\tilde{P}_{\tilde{\mu}}) = \frac{1}{2}\}$, 它通过点 -2 , 如图 6.2 所示. 类似于 (3.15), 我们有

$$\min\{J(\tilde{P}_{\tilde{\mu}}) : \tilde{\mu} \in \tilde{\Gamma}\} = J(\tilde{P}_{-2}) = -3 \log 2. \quad (3.16)$$

参考文献

- [1] L.V.Ahlfors, **Complex Analysis**, third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.
- [2] B.Beauzamy and P.Enflo, *Estimations de produits de polynômes*, J. Number Theory **21**(1985), 390–412.
- [3] B.Beauzamy, *Jensen's inequality for polynomials with concentration at low degrees*, Numer. Math. **49**(1986), 221–225.
- [4] B.Beauzamy, *A minimization problem connected with the generalized Jensen's inequality*, J. Math. Anal. Appl. **145**(1990), 137–144.
- [5] R.P.Boas, *Entire Functions*, Academic Press, Inc., New York, 1954.
- [6] L.Bonvalot, *Moyenne géométrique des fonctions des espaces de Hardy et polynômes concentrés aux bas degrés*, Thèse de Troisième Cycle, Université de Paris 7, 1986.
- [7] P.L.Durin, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, Inc., New York, 1970.
- [8] K.Mahler, *An application of Jensen's formula to polynomials*, Mathematika **7**(1960), 98–100.
- [9] K.Mahler, *On two extremum properties of polynomials*, III. J. Math. **7**(1963), 681–701.
- [10] M.Marden, *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys Number 3, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1966.
- [11] J.K.Patel and C.B.Read, *Handbook of the Normal Distribution*, Marcel Dekker, New York, 1982.
- [12] A.K.Rigler, S.Y.Trimble, and R.S.Varga, *Sharp lower bounds for a generalized Jensen inequality*, Rocky Mountain J. Math.

19(1989), 353-373.

- [13] W.Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

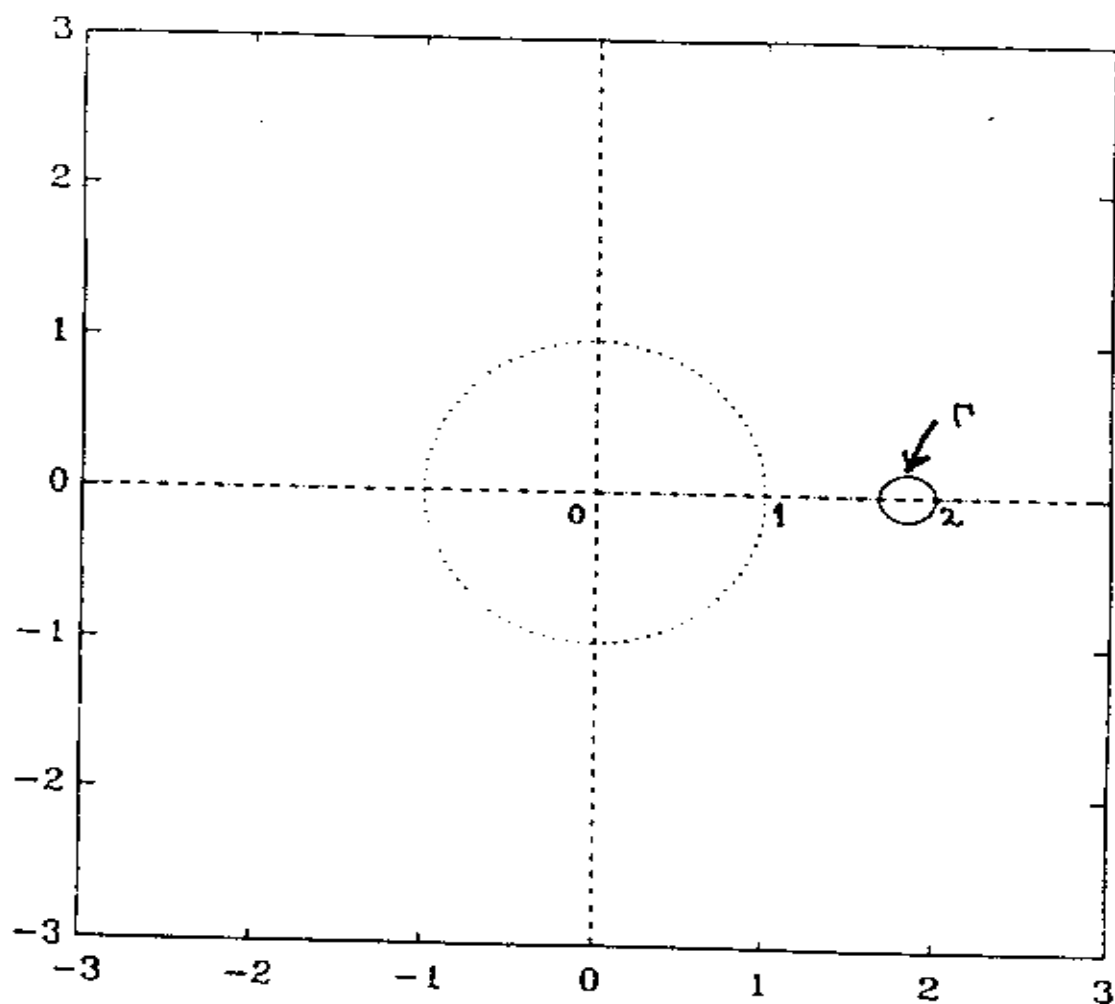


图 6.1 Γ 曲线

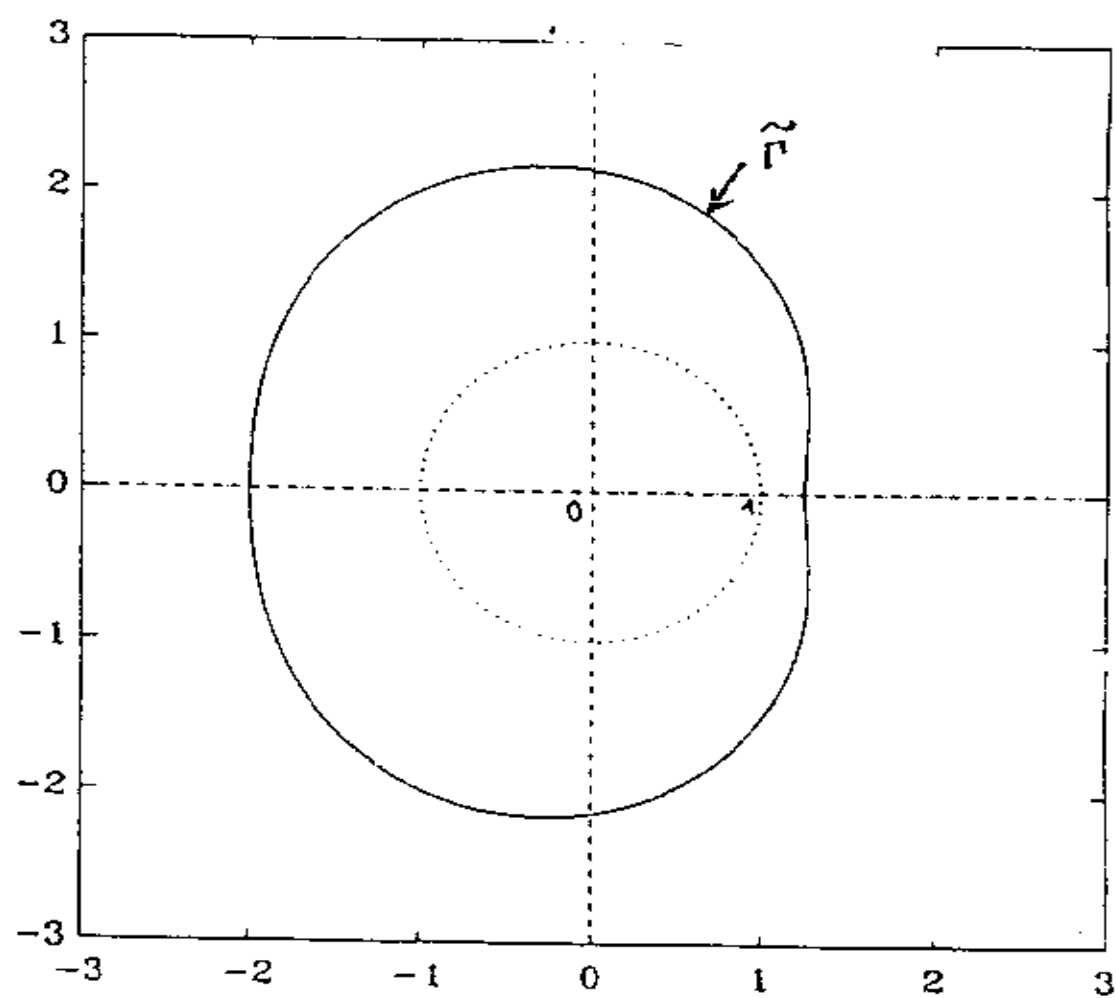


图 6.2 $\tilde{\Gamma}$ 曲线